PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA NONLINIER ORDE DUA DENGAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh :

<u>M. NIZAM MUHAIJIR</u>
10654004486

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2010

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA NONLINIER ORDE DUA DENGAN MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI ADOMIAN LAPLACE

M. NIZAM MUHAIJIR
NIM : 10654004486

Tanggal Sidang : 30 April 2010
Periode Wisuda : Juli 2010

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua dengan bentuk umum $p(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + q(x)\dfrac{dy}{dx} + r(x)y + f(y) = g(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$ dan $y'(0) = \beta$ serta komponen nonliniernya $Ny = f(y)$ yang merupakan polinomial Adomian A_n menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. Metode dekomposisi Adomian Laplace adalah metode untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier yang mengkombinasikan antara tranformasi Laplace dan metode dekomposisi Adomian. Berdasarkan perhitungan terlihat bahwa hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan Riccati dan persamaan Painleve adalah sama dengan metode dekomposisi Adomian. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa metode ini lebih efektif dan akurat untuk menghampiri penyelesaian eksak jika dibandingkan dengan metode iterasi variasi untuk persamaan Riccati dan metode homotopi pertubasi untuk persamaan Painleve.

Kata Kunci: Metode Dekomposisi Adomian, Metode Dekomposisi Adomian Laplace, Metode Iterasi Variasi, Metode Pertubasi Homotopi, Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier, Persamaan Painleve, Persamaan Riccati.

ON THE SOLUTION OF SECOND-ORDER NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION BY USING LAPLACE ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

M. NIZAM MUHAIJIR
NIM : 10654004486

Date of Final Exam : April 30, 2010
Graduation Cremony Priod : July 2010

Mathematics Departement
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

This thesis discusses about the solving of second-order nonlinear ordinary differential equation with general form $p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y+f(y)=g(x)$ *by initial value problem* $y(0)=\alpha$ *and* $y'(0)=\beta$ *along with component of nonlinear term* $Ny=f(y)$ *that form of polynomial Adomian* A_n *by using Laplace Adomian Decomposition Method. Laplace Adomian Decomposition Method is a method to solve of nonlinear ordinary differential equation that combine between Laplace transform and Adomian Decompositiom Method. Based on calculation seen that the result that gotten by using Laplace Adomian Decomposition Method to solve Riccati equation and Painleve equation are same with Adomian Decomposition Method. The result that obtained show the method this is more efecctive and accurate to draw near the exact solution if compared with variational iteration method to Riccati equation and homotopy perturbation method to Painleve equation.*

Key Word : *Adomian Decomposition Method, Laplace Adomian Decomposition Method, Variational Iteration Method, Homotopy Pertubation Method, Nonlinear of Ordinary Differential Equation, Painleve Equation, Riccati Equation.*

DAFTAR ISI

	Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN	ii
LEMBAR PENGESAHAAN	iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL	iv
LEMBAR PERNYATAAN	v
LEMBAR PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	viii
KATA PENGANTAR	ix
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR LAMBANG	xvi
DAFTAR SINGKATAN	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xviii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang Masalah	I-1
1.2 Rumusan Masalah	I-2
1.3 Batasan Masalah	I-2
1.4 Tujuan Penilitian	I-2
1.5 Manfaat Penelitian	I-3
1.6 Sistematika Penulisan	I-3
BAB II LANDASAN TEORI	
2.1 Persamaan Diferensial	II-1
2.2 Persamaan Diferensial Biasa	II-1
2.3 Klasifikasi Persamaan Diferensial Biasa	II-2
2.4 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu dan Dua	II-3
2.5 Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu dan Dua	II-5
2.6 Transformasi Laplace	II-13
2.7 Metode Dekomposisi Adomian	II-18

2.8 Metode Dekomposisi Adomian Laplace II-23

BAB III METODOLOGI

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Persamaan Nonhomogen.. IV-1

4.2 Persamaan Homogen.. IV-15

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan V-1

5.2 Saran... V-2

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan permasalahan yang banyak dijumpai ketika analisa yang dilakukan tergantung pada waktu dan nilainya mengalami perubahan-perubahan berdasarkan waktu. Pemunculan persamaan-persamaan diferensial di dalam metematika terapan tidak lain karena kebanyakan hukum-hukum dalam kajian ilmiah dapat dimodelkan menggunakan persamaan diferensial dengan waktu sebagai variabel bebas.

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial terkadang dapat diselesaikan secara eksak dan penyelesaiannya dapat dinyatakan dalam bentuk ekspresi fungsi secara eksplisit.

Contoh :

$$y'(x) = g(x) \tag{1.1}$$

Maka penyelesaiannya adalah

$$y(x) = G(x) + c \tag{1.2}$$

dengan $G(x)$ merupakan anti turunan dari $g(x)$ dan c adalah suatu konstanta integrasi. Selanjutnya konstanta c dapat memberikan penyelesaian khusus dengan cara menentukan nilai $y(x)$ di suatu x tertentu. Misalnya

$$y(x_0) = x_0 \tag{1.3}$$

Permasalahan yang sering terjadi adalah terkadang teknik-teknik analitik tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan persamaan diferensial tertentu, khususnya persamaan diferensial nonlinier yang sangat sulit diselesaikan secara analitik walaupun sebagian kecil dapat diselesaikan dengan metode variabel terpisah. Untuk itu, diperlukan metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan tersebut. Pendekatan yang digunakan dalam metode numerik merupakan pendekatan analisis matematis. Sehingga hasil yang diperoleh merupakan nilai hampiran yang akan mendekati nilai sebenarnya.

Banyak metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinier, salah satunya adalah metode dekomposisi Adomian yang diperkenalkan pertama kali oleh Adomian (1994).

Selanjutnya, beberapa peneliti mengembangkan metode Dekomposisi Adomian dengan melakukan modifikasi, yaitu dengan melibatkan transformasi Laplace yang biasa disebut Metode Dekomposisi Adomian Laplace (LADM). Syam dan Hamdan (2006) menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan Bratu dan Yusufoglu (2006) juga menggunakan algoritma Dekomposisi Laplace untuk mencari penyelesaian persamaan Duffing.

Perkembangan selanjutnya, Kiymas (2009) juga melakukan kombinasi antara transformasi Laplace dengan metode dekomposisi Adomian untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua dengan koefisien variabel.

Hal tersebut membuat penulis tertarik untuk menggunakan metode Dekomposisi Adomian Laplace untuk menentukan penyelesaian eksplisit persamaan diferensial biasa nonlinier. Untuk itu, tugas akhir ini diberi judul **”Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier Orde Dua dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace”.**

1.2. Rumusan Masalah

Permasalahan dalam penelitian tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua yang berbentuk $p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y+f(y)=g(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0)=\alpha$ dan $y'(0)=\beta$ menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace.

1.3. Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini penulis hanya membatasi pembahasan pada persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua yang bentuk umumnya $p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y+f(y)=g(x)$ dengan variabel bebas x.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menentukan penyelesaian eksplisit dari persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua yang berbentuk $p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y+f(y)=g(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0)=\alpha$ dan $y'(0)=\beta$ menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah memberikan penyelesaian eksplisit untuk persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua yang mempunyai bentuk umum $p(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+q(x)\dfrac{dy}{dx}+r(x)y+f(y)=g(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0)=\alpha$ dan $y'(0)=\beta$.

1.6. Sistematika Penulisan

Sistematika dalam penulisan tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab, yaitu sebagai berikut :

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan landasan teori, seperti persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, klasifikasi persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial biasa orde satu dan dua, penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu dan dua, Transformasi Laplace, Metode Dekomposisi Adomian, dan Metode Dekomposisi Adomian Laplace.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan tentang studi literatur yang digunakan penulis serta langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari penelitian ini.

BAB IV Hasil dan Pembahasan

Bab ini berisikan tentang Metode Dekomposisi Adomian Laplace yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua yang berbentuk $p(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+q(x)\dfrac{dy}{dx}+r(x)y+f(y)=g(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0)=\alpha$ dan $y'(0)=\beta$.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari keseluruhan pembahasan dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

Adapun landasan teori yang penulis gunakan dalam penyusunan tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

2.1. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat (*dependent variable*) terhadap satu atau lebih variabel bebas (*independent variable*). Secara garis besar persamaan diferensial dapat dikelompokkan ke dalam dua kelompok yaitu :

a) Persamaan Diferensial Biasa (*Ordinary Differential Equation*)

Persamaan diferensial biasa merupakan turunan pertama dari suatu fungsi yang terdiri dari satu variabel.

Definisi 2.1. (Varberg, 2007) Diferensial biasa terjadi jika y adalah fungsi yang hanya terdiri satu variabel dan hanya dapat diturunkan terhadap variabel tersebut, dengan rumus :

$$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

b) Persamaan Diferensial Parsial (*Partial Differential Equation*)

Persamaan diferensial parsial merupakan turunan pertama dari suatu fungsi yang terdiri dari dua variabel x dan t.

Definisi 2.2. (Varberg, 2007) Diferensial parsial terjadi jika y adalah fungsi dua varibel x dan t, dan diturunkan terhadap salah satu variabel dengan menganggap variabel lain sebagai konstanta, dengan rumus :

$$y'_x(x,t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h,t) - y(x,t)}{h}, \text{ jika diturunkan terhadap } x.$$

$$y'_t(x,t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(x,t+h) - y(x,t)}{h}, \text{ jika diturunkan terhadap } t.$$

2.2. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*) adalah suatu persamaan yang turunan fungsinya hanya bergantung pada satu variabel terikat (*dependent variable*). Contohnya adalah persamaan peluruhan zat radioakif dengan bentuk persamaan

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t) \tag{2.1}$$

dimana $R(t)$ adalah jumlah zat radioaktif pada waktu t, dan k adalah konstanta peluruhan.

Definisi 2.3. (Wartono dkk, 2008) Persamaan diferensial biasa orde-*n* adalah suatu persamaan yang mempunyai bentuk umum,

$$F(y, y', y'', y^{(3)}, ..., y^{(n)} = f(x)$$

dengan tanda aksen menunjukkan turunan terhadap x, yaitu $y' = \dfrac{dy}{dx}, y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, dan seterusnya.

2.3. Klasifikasi Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa dapat diklasifikasi berdasarkan hal-hal sebagai berikut :

a. Orde

Orde persamaan diferensial adalah tingkat dari turunan tertinggi yang termuat dalam persamaan diferensial tersebut.

Contoh :

i. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0,$ disebut berorde dua.

ii. $\dfrac{dy}{dx} - 3y = 3,$ disebut berorde satu.

b. Derajat

Derajat persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi yang dimiliki oleh suatu fungsi pada persamaan diferensial tersebut.

Contoh :

i. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} = 0,$ memiliki derajat satu.

ii. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$ memiliki derajat dua.

c. Linier dan Nonlinier

Dalam persamaan diferensial juga sering muncul bentuk-bentuk linier dan nonlinier. Secara umum persamaan diferensial biasa orde-*n* dapat ditulis dalam bentuk,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x) \tag{2.2}$$

Fungsi-fungsi $a_0(x), a_1(x), ..., a_n(x)$ pada persamaan (2.2) adalah koefisien dari persamaan diferensial tersebut. Jika koefisien-koefisien tersebut berbentuk konstanta, maka persamaan diferensial dikatakan persamaan diferensial dengan koefisien konstanta, dan jika koefisien-koefisien itu berbentuk variabel, maka persamaan diferensial tersebut dikatakan persamaan diferensial dengan koefisien variabel.

Persamaan diferensial yang dapat dituliskan ke dalam bentuk persamaan (2.2), maka dikatakan persamaan diferensial biasa linier. Akan tetapi, jika persamaan diferensial tidak dapat dituliskan ke dalam bentuk persamaan (2.2), maka persamaan diferensial itu disebut persamaan diferensial biasa nonlinier.

Contoh :

i. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = x,$ disebut persamaan diferensial biasa linier.

ii. $\frac{dy}{dx} - y^2 = 0,$ disebut persamaan diferensial biasa nonlinier karena bentuk y^2.

d. Kehomogenan

Perhatikan kembali persamaan (2.2). Jika $f(x) = 0$ maka persamaan diferensial disebut persamaan diferensial homogen. Sebaliknya jika $f(x) \neq 0$, maka persamaan diferensial disebut persamaan diferensial nonhomogen.

Contoh :

i. $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x,$ disebut persamaan diferensial nonhomogen karena $f(x) = e^x$.

ii. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0,$ disebut persamaan diferensial homogen karena $f(x) = 0$.

2.4. Persamaan Diferensial Orde Satu dan Dua

2.4.1. Persamaan Diferensial Orde Satu

Persamaan diferensial biasa orde satu adalah persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya berorde satu. Secara umum dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.3}$$

dengan f adalah fungsi dalam dua variabel yang diberikan. Apabila fungsi f dalam persamaan (2.3) bergantung linear pada variabel bebas y, maka persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{2.4}$$

dan disebut persamaan diferensial biasa linier orde satu. Selanjutnya pada persamaan (2.4) jika $g(x) = 0,$ maka persamaan disebut persamaan diferensial biasa orde satu homogen. Sebaliknya, jika $g(x) \neq 0$ maka persamaan disebut persamaan diferensial biasa orde satu nonhomogen.

2.4.2. Persamaan Diferensial Orde Dua

Persamaan diferensial biasa orde dua adalah persamaan diferensial biasa yang turunan tertingginya berorde dua. Secara umum persamaan diferensial biasa orde dua dapat ditulis dalam bentuk

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = g(x) \tag{2.5}$$

dengan fungsi-fungsi $p(x), q(x),$ dan $r(x)$ adalah koefisien dari persamaan diferensial tersebut. Jika fungsi-fungsi $p(x), q(x),$ dan $r(x)$ adalah konstanta, maka persamaan (2.5) mempunyai koefisien konstanta, sebaliknya jika fungsi-fungsi $p(x), q(x),$ dan $r(x)$ bukan konstanta, maka persamaan (2.5) mempunyai koefisien variabel.

Jika dimisalkan $p(x) \neq 0$, maka persamaan (2.5) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = f(x) \tag{2.6}$$

dengan

$$Q(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \qquad R(x) = \frac{r(x)}{p(x)}, \qquad f(x) = \frac{g(x)}{p(x)}$$

Selanjutnya pada persamaan (2.5) jika $g(x) = 0,$ maka persamaan disebut persamaan diferensial biasa orde dua homogen. Sebaliknya, jika $g(x) \neq 0$ maka persamaan disebut persamaan diferensial biasa orde dua nonhomogen.

2.5. Penyelesaian Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu dan Dua

2.5.1. Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Satu

Dalam menentukan penyelesaian eksplisit persamaan diferensial biasa orde satu dapat digunakan beberapa metode. Diantara metode-metode yang dapat digunakan adalah sebagai berikut :

1. Persamaan Variabel Terpisah

Pandang kembali persamaan diferensial linier orde satu berikut,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{2.7}$$

Selanjutnya ubah persamaan (2.7) ke dalam bentuk variabel terpisah

$$g(y)dy = f(x)dx \tag{2.8}$$

Persamaan (2.8) disebut persamaan terpisah. Selanjutnya dengan mengintegralkan kedua ruas untuk persamaan (2.8) akan diperoleh,

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C$$

$$G(y) = F(x) + C \tag{2.9}$$

dengan $G(y)$ dan $F(x)$ masing-masing merupakan anti turunan dari $g(y)$ dan $f(x)$.

2. Faktor Integrasi

Pandang kembali persamaan diferensial biasa orde satu berikut,

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \tag{2.10}$$

Agar persamaan (2.10) lebih sederhana dan memudahkan dalam penyelesaian, maka lakukan penggantian $p(x)$ dengan a, sehingga persamaan (2.10) menjadi

$$y' + ay = f(x) \tag{2.11}$$

Perkalian dengan e^{ax} (faktor integrasi) kedua ruas persamaan (2.11) , maka akan diperoleh

$$e^{ax}(y' + ay) = f(x)e^{ax} \tag{2.12}$$

Oleh karena,

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}y) = ae^{ax}y + e^{ax}\frac{dy}{dx}$$

maka persamaan (2.12) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}y) = f(x)e^{ax} \tag{2.13}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (2.13) diperoleh

$$e^{ax}y = \int f(x)e^{ax}dx + c \tag{2.14}$$

Selanjutnya, penyelesaian $y(x)$ dari persamaan (2.14) diberikan oleh

$$y(x) = e^{-ax}\int f(x)e^{ax}dx + ce^{-ax} \tag{2.15}$$

Dengan menggantikan kembali a dengan $p(x)$ untuk persamaan (2.15) dan misalkan $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$, maka persamaan (2.15) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$y(x) = \frac{\int \mu(x)f(x)dx + c}{\mu(x)} \tag{2.16}$$

Persamaan (2.16) merupakan persamaan yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaian persamaan diferensial dengan bentuk umum pada persamaan (2.10)

Contoh 2.1

Tentukan penyelesain dari persamaan diferensial dengan masalah nilai awal berikut

$$\frac{dy}{dx} = 2y, \quad y(0) = 1 \tag{2.17}$$

Penyelesaian :

Penyelesaian dari persamaan (2.17) dapat dilakukan dengan menggunakan metode variabel terpisah dan faktor integrasi.

a) Menggunakan Variabel Terpisah

Pertama yang dilakukan adalah mengubah persamaan (2.17) dalam bentuk variabel terpisah sehingga menjadi

$$\frac{1}{y}dy = 2dx, \quad y(0) = 1 \tag{2.18}$$

Selanjutnya dengan mengintegralkan kedua ruas pada persamaan (2.18), maka diperoleh

$$ln(y) = 2x + c$$

$$y(x) = ce^{2x} \tag{2.19}$$

Untuk menentukan solusi dengan masalah nilai awal $y(0) = 1,$ maka substitusikan $x = 0$ dan $y = 1$ ke dalam persamaan (2.19) maka diperoleh nilai $c = 1$, sehingga solusi dari masalah nilai awal yang dimaksud adalah

$$y(x) = e^{2x} \tag{2.20}$$

b) Menggunakan Faktor Integrasi

Persamaan (2.17) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0, \quad y(0) = 1 \tag{2.21}$$

Berdasarkan persamaan (2.10), maka untuk persamaan (2.21) diperoleh $p(x) = -2$, $f(x) = 0$, dan $\mu(x) = e^{-2x}$. Sehingga diperoleh penyelesaian

$$y(x) = ce^{2x} \tag{2.22}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan $x = 0$ dan $y = 1$ ke dalam persamaan (2.22) maka diperoleh nilai $c = 1$, sehingga solusi yang diperoleh

$$y(x) = e^{2x} \tag{2.23}$$

Dengan demikian, kedua metode mempunyai penyelesaian yang sama yang ditunjukkan oleh persamaan (2.20) dan persamaan (2.23).

2.5.2. Penyelesaian Persamaan Diferensial Orde Dua

Penyelesaian persamaan diferensial orde dua dapat menggunakan metode-metode sebagai berikut :

1. Persamaan Diferensial Biasa Homogen dengan Koefisien Konstanta

Pertimbangkan persamaan homogen linier orde dua berikut :

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = 0 \tag{2.24}$$

dengan $p(x), q(x),$ dan $r(x)$ adalah konstanta dan $p(x) \neq 0$. Selanjutnya, dengan menggantikan $p(x) = a, q(x) = b,$ dan $r(x) = c$, maka persamaan (2.24) dapat ditulis kembali dalam bentuk,

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.25}$$

Persamaan (2.25) dapat diselesaikan dengan memisalkan $y = e^{rx}$, sehingga

$$\begin{aligned} a\frac{d^2(e^{rx})}{dx^2} + b\frac{d(e^{rx})}{dx} + ce^{rx} &= 0 \\ ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0 \\ e^{rx}(ar^2 + br + c) &= 0 \end{aligned}$$

Oleh karena, $e^{rx} \neq 0$ maka $y(x) = e^{rx}$ merupakan penyelesaian persamaan (2.25) jika dan hanya jika r memenuhi persamaan karakteristik,

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.26}$$

Penyelesaian dari persamaan karakteristik (2.26) adalah

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

dan

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Penyelesaian khusus dari persoalan persamaan diferensial linier orde dua pada persamaan (2.25) bergantung pada nilai diskriminan. Adapun bentuk-bentuk penyelesaian berdasarkan nilai deskriminan adalah sebagai berikut :

a. Akar-akar Real dan Berbeda $(b^2 - 4ac > 0)$

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah real dan berbeda, maka penyelesaian umum dari persamaan (2.25) adalah

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{2.27}$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

b. Akar-akar Berulang $(b^2 - 4ac = 0)$

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah sama $(r_1 = r_2)$, maka penyelesaian umum dari persamaan (2.25) adalah

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x} \tag{2.28}$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

c. Akar-akar Imajiner $(b^2 - 4ac < 0)$

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah bilangan kompleks ($r_1 = \alpha + i\beta$ dan $r_2 = \alpha - i\beta$), maka penyelesaian umum dari persamaan (2.25) adalah

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \tag{2.29}$$

dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

Contoh 2.2

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0 \tag{2.30}$$

Penyelesaian :

Persamaan karakteristik dari persamaan (2.30) adalah

$$r^2 + r - 6 = 0 \tag{2.31}$$

Dengan menggunakan rumus kuadratik untuk persamaan (2.31) maka diperoleh akar-akarnya $r_1 = 2$ dan $r_2 = -3$, sehingga penyelesaian umum dari persamaan (2.31) adalah

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} \tag{2.32}$$

2. Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen dengan Koefisien Konstanta

Pandang persamaan diferensial biasa nonhomogen berikut :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.33}$$

Jika dimisalkan $y_c(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan homogen

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.34}$$

dan $y_p(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan nonhomogen. Maka penyelesaian umum dari persamaan nonhomogen (2.33) dapat ditulis dalam bentuk

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \tag{2.35}$$

Contoh 2.3

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \tag{2.36}$$

Penyelesaian :

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum persamaan homogen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0 \tag{2.37}$$

Persamaan karakteristik untuk persamaan (2.37) adalah $r^2 + 3r - 4r = (r+4)(r-1)$, maka diperoleh penyelesaian

$$y_c(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} \tag{2.38}$$

Selanjutnya untuk penyelesaian $y_p(x)$ diberikan oleh

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C \tag{2.39}$$

sehingga

$$y_p'(x) = 2Ax + B \text{ dan } y_p''(x) = 2A$$

Untuk menentukan nilai $A, B,$ dan C maka substitusikan nilai-nilai $y_p(x), y_p'(x),$ dan $y_p''(x)$ ke dalam persamaan (2.36) sehingga diperoleh

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 \tag{2.40}$$

dengan menggunakan kesamaan koefisien untuk persamaan (2.40), maka diperoleh nilai $A = -\frac{1}{4}, B = -\frac{3}{8},$ dan $C = -\frac{13}{32}$, sehingga

$$y_p(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32} \tag{2.41}$$

Jadi, penyelesaian umum untuk persamaan (2.36) adalah menjumlahkan persamaan (2.38) dengan persamaan (2.41), sehingga diperoleh

$$y(x) = c_1e^{-4x} + c_2e^x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32} \tag{2.42}$$

3. Persamaan Diferensial Biasa dengan Koefisien Variabel

Pandang persamaan diferensial biasa orde *n* berikut :

$$a_nx^2\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1x\frac{dy}{dx} + a_0y = g(x) \tag{2.43}$$

Persamaan (2.43) merupakan persamaan Cauchy-Euler, dengan $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ adalah konstanta dari persamaan Cauchy-Euler. Selanjutnya, persamaan (2.43) untuk $g(x) = 0$ dapat diubah kedalam bentuk persamaan diferensial homogen orde dua berikut,

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.44}$$

dan persamaan diferensial nonhomogennya,

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.45}$$

Untuk menyelesaikan persamaan homogen, andaikan suatu penyelesaian dalam bentuk,

$$y = x^r, \frac{dy}{dx} = rx^{r-1}, \text{dan } \frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)x^{r-2}$$

Sehingga persamaan (2.44) menjadi

$$\begin{aligned} ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy &= ax^2r(r-1)x^{r-2} + bxrx^{r-1} + cx^r \\ &= ar(r-1)x^r + brx^r + cx^r \\ &= x^r(ar(r-1) + br + c) \end{aligned}$$

Oleh karena $x^r \neq 0$, maka penyelesaian persamaan (2.44) adalah $y(x) = x^r$ jika dan hanya jika r memenuhi persamaan karakteristik,

$$ar(r-1) + br + c \tag{2.46}$$

atau

$$ar^2 + (b-a)r + c \tag{2.47}$$

Berdasarkan persamaan (2.47), terdapat tiga kasus berbeda yang harus dipertimbangkan berdasarkan nilai akar-akar yang diperoleh, yaitu apakah akar-akar real berbeda, akar-akar sama, dan akar-akar kompleks konjugat.

Kasus I. Akar-akar Real Berbeda $(b^2 - 4ac > 0)$

Jika r_1 dan r_2 adalah akar-akar dari persamaan diferensial (2.47) dengan $r_1 \neq r_2$, maka penyelesaian umumnya adalah

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \tag{2.48}$$

Kasus II. Akar-akar Sama $(b^2 - 4ac = 0)$

Jika r_1 dan r_2 adalah akar-akar dari persamaan diferensial (2.47) dengan $r_1 = r_2$, maka penyelesaian umumnya adalah

$$y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} \ln x \tag{2.49}$$

Kasus III. Akar-akar Kompleks Konjugat $(b^2 - 4ac < 0)$

Jika r_1 dan r_2 adalah akar-akar kompleks konjugat untuk penyelesaian persamaan (2.47) dengan $r_1 = \alpha + i\beta$ dan $r_2 = \alpha - i\beta$, maka penyelesaian umumnya adalah

$$y(x) = x^{\alpha}[c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x) \tag{2.50}$$

Contoh 2.4

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut

$$4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{2.51}$$

Penyelesaian :

Substitusikan $y = x^r, y' = rx^{r-1}$, dan $y'' = r(r-1)x^{r-2}$ ke persamaan (2.51) sehingga diperoleh

$$4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} + y = 4x^2 r(r-1)x^{r-2} + 8xrx^{r-1} + x^r$$

$$= 4r(r-1)x^r + 8rx^r + x^r$$

$$= x^r(4r(r-1) + 8r + 1)$$

$$= x^r(4r^2 + 4r + 1)$$

Oleh karena $x^r \neq 0$, diperoleh persamaan karakteristik $(4r^2 + 4r + 1) = (2r+1)^2$. Maka nilai $r_1 = r_2$ yaitu $-\frac{1}{2}$, sehingga penyelesaian umum untuk persamaan (2.51) adalah

$$y(x) = c_1 x^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^{-\frac{1}{2}} \ln(x) \tag{2.52}$$

4. Variasi Parameter

Pertimbangkan kembali persamaan diferensial biasa orde dua berikut

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = g(x) \tag{2.53}$$

dengan $p(x), q(x),$ dan $r(x)$ adalah konstanta dan $p(x) \neq 0$. Selanjutnya, dengan menggantikan $p(x) = a, q(x) = b,$ dan $r(x) = c$, maka persamaan (2.53) dapat ditulis kembali dalam bentuk,

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.54}$$

Persamaan (2.54) dapat diselesaikan dengan menggunakan variasi parameter dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Andaikan $\{y_1, y_2\}$ adalah penyelesaian untuk persamaan homogen

   $a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\dfrac{dy}{dx} + cy = 0.$

2. Selanjutnya, substitusikan nilai $\{y_1, y_2\}$ ke dalam sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} v_1'y_1 + v_2'y_2 &= 0 \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' &= \frac{g(x)}{a} \end{aligned} \tag{2.55}$$

3. Selesaikan sistem persamaan (2.55) untuk memporoleh nilai v_1' dan v_2'.

4. Untuk memperoleh nilai v_1 dan v_2, carilah anti turunan dari v_1' dan v_2'.

5. Terakhir, setelah diperoleh nilai-nilai $y_1, y_2, v_1,$ dan v_2, substitusikan ke persamaan berikut

$$y(x) = v_1y_1 + v_2y_2 + c_1y_1 + c_2y_2 \tag{2.56}$$

Persamaan (2.56) merupakan solusi umum untuk penyelesaian persamaan (2.54) dengan menggunakan variasi parameter.

Contoh 2.5

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial berikut

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = 4x^7 \tag{2.57}$$

Penyelesaian :

Peyelesaian persamaan (2.57) menggunakan variasi parameter dimulai dengan mencari penyelesaian persamaan homogen yaitu

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \tag{2.58}$$

Oleh karena, persamaan karakteristik untuk persamaan (2.58) adalah $r^2 - 4r + 3 = (r-1)(r-3)$, maka diperoleh nilai $y_1 = x$ dan $y_2 = x^3$.

Berdasarkan persamaan (2.55) diperoleh

$$\begin{aligned} v_1'x + v_2'x^3 &= 0 \\ v_1' + v_2'(3x^2) &= 4x^5 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Selanjutnya, dengan menyelesaikan persamaan (2.59) diperoleh nilai $v_1' = -2x^5$ dan $v_2' = 2x^3$. Sehingga nilai $v_1 = -\dfrac{x^6}{3}$ dan $v_2 = \dfrac{x^4}{2}$.

Berdasarkan persamaan (2.56) diperoleh

$$y(x) = \frac{x^7}{6} + c_1x + c_2x^3 \tag{2.60}$$

Persamaan (2.60) merupakan solusi umum untuk penyelesaian persamaan (2.57).

2.6. Transformasi Laplace

Transformasi Laplace adalah suatu teknik untuk menyederhanakan permasalahan dalam suatu sistem yang mengandung masukan dan keluaran, dengan melakukan transformasi dari suatu domain pengamatan ke domain pengamatan yang lain.

Definisi 2.4. (Wartono dkk, 2008) Misalkan $F(t)$ terdefinisi untuk $t \geq 0$, transformasi Laplace f adalah fungsi F yang didefinisikan oleh integral

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt$$

domain (daerah asal) $F(s)$ adalah semua nilai s yang mana integral tersebut ada. Disebut transformasi Laplace jika limit itu ada.

Secara simbolik, transformasi Laplace untuk f dilambangkan dengan $\mathcal{L}\{f(t)\}$ dan penyelesaiannya bergantung pada s yang ditulis dalam bentuk,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \tag{2.61}$$

Contoh 2.6

Tentukan transformasi Laplace untuk fungsi eksponensial $f(t) = e^{kt}$, dengan k adalah sebarang konstanta.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan definisi transformasi Laplace maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{kt}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{kt} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-k)t} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(\int_0^b e^{-(s-k)t} dt \right) \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{e^{-(s-k)t}}{s-k} \Bigg|_0^b \right) \\
&= -\frac{1}{s-k} \lim_{b\to\infty} \left(e^{-(s-k)t} - 1 \right) \\
&= -\frac{1}{s-k}, \text{ untuk } s > k
\end{aligned}$$

Jadi, transformasi Laplace dari $f(t) = e^{kt}$ adalah $-\dfrac{1}{s-k}$ untuk $s > k$.

Teorema 2.1. (Kreyszig, 2006) Transformasi Laplace adalah sebuah operasi linier, dimana untuk setiap fungsi $f(t)$ dan $g(t)$ mempunyai transformasi dan terdapat konstanta a dan b pada transformasi $af(t) + bg(t)$ ada, maka

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$$

Bukti :

Dengan menggunakan definisi (2.4), maka diperoleh

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]dt \\ &= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt \\ &= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Definisi 2.5. (Wartono dkk, 2008) Invers transformasi Laplace fungsi $F(s)$ adalah fungsi kontinu f tunggal yang memenuhi

$$\mathcal{L}\{f\} = F(s)$$

yang dilambangkan dengan $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Contoh 2.7

Tentukan invers transformasi Laplace dari $\frac{1}{s^5}$.

Penyelesaian :

Dengan menggunakan aturan yang berlaku pada transformasi Laplace diperoleh $n = 4$, sehingga

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} &= \frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} \\ &= \frac{1}{24}t^4\end{aligned}$$

Jadi, invers transformasi Laplace dari $\frac{1}{s^5}$ adalah $\frac{1}{24}t^4$.

Teorema 2.2. (Kreyszig, 2006) Jika $f(t)$ mempunyai transformasi $F(s)$, dimana $s > k$ untuk semua k, maka $e^{at}f(t)$ mempunyai transformasi $F(s-a)$, dimana $s-a > k$, sehingga dapat ditulis

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

atau, jika kedua ruas diinverskan, maka diperoleh

$$\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$$

Bukti :

Berdasarkan teorema untuk $F(s-a)$ diperoleh dengan menggantikan s dengan $s-a$, selanjutnya dengan menggunakan definisi transformasi Laplace, maka diperoleh

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \Big[e^{at} f(t)\Big] dt$$

$$= \mathcal{L}\Big\{e^{at} f(t)\Big\} \qquad \blacksquare$$

Untuk beberapa kasus pada transformasi Laplace muncul bentuk polinomial. Oleh karena itu, untuk mendapatkan penyelesaiannya maka dengan menuliskan dalam bentuk dekomposisi pecahan parsial. Berikut ini diberikan beberapa bentuk pecahan parsial yang sering muncul, yaitu sebagai berikut :

1. Bentuk Linier

   Untuk setiap faktor $(as+b)$ sebagai pembagi, maka berkorespondensi dengan bentuk dekomposisi pecahan parsialnya, yaitu :

$$\frac{A}{as+b}$$

2. Faktor Deret Linier

   Untuk setiap faktor $(as+b)^n$ sebagai pembagi, maka berkorespondensi dengan bentuk dekomposisi pecahan parsialnya, yaitu :

$$\frac{A_1}{(as+b)} + \frac{A_2}{(as+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(as+b)^n}$$

3. Faktor Kuadratik

   Untuk setiap faktor (as^2+bs+c) sebagai pembagi, maka berkorespondensi dengan bentuk dekomposisi pecahan parsialnya, yaitu :

$$\frac{As+B}{as^2+bs+c}$$

4. Faktor Deret Kuadratik

   Untuk setiap faktor $(as^2+bs+c)^n$ sebagai pembagi, maka berkorespondensi dengan bentuk dekomposisi pecahan parsialnya, yaitu :

$$\frac{A_1}{(as^2+bs+c)} + \frac{A_2}{(as^2+bs+c)^2} + \dots + \frac{A_n}{(as^2+bs+c)^n}$$

Teorema 2.3. (Kreyszig, 2006) Transforsmasi Laplace untuk turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(t)$ dapat ditulis

[1] $\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0)$

[2] $\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$

Bukti :

Dengan menggunakan definisi transformasi Laplace, maka

[1] $$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'\} &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt \\ &= \left[e^{-st} f(t)\right]\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \\ &= s\mathcal{L}\{f\} - f(0) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

[2] $$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''\} &= s\mathcal{L}\{f'\} - f'(0) \\ &= s\left[s\mathcal{L}\{f\} - f(0)\right] - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{f\} - f(0) - f'(0) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Contoh 2.8

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial dengan masalah nilai awal berikut menggunakan transformasi Laplace.

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-t},\ y(0) = 1 \tag{2.62}$$

Penyelesaian :

Persamaan (2.54) dapat dubah dalam bentuk

$$y' + 3y = e^{-t},\ y(0) = 1 \tag{2.63}$$

Dengan transformasi Laplace untuk kedua ruas persamaan (2.63) diperoleh

$$\mathcal{L}\{y' + 3y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} \tag{2.64}$$

Selanjutnya dengan menggunakan sifat kelinieran pada transformasi Laplace maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{y'\} + 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\} \tag{2.65}$$

Oleh karena, $\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0)$ dan syarat awal $y(0) = 1$, maka dengan mensubstitusikan ke persamaan (2.65), maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\left[s\mathcal{L}\{y\} - y(0)\right] + 3\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^{-t}\} \\
(s\mathcal{L}\{y\} - 1) + 3\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s+1} \\
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \qquad (2.66)
\end{aligned}
$$

sehingga penyelesaian untuk $y(t)$ adalah

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \\
&= \frac{1}{(s+3)} + \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\
&= \frac{1}{(s+3)} + \left(\frac{1}{2(s+3)} - \frac{1}{2(s+3)}\right) \\
&= \mathcal{L}\{e^{-3t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-3t}\} \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan bentuk persamaan (2.67), maka dengan menggunakan sifat invers transformasi Laplace diperoleh

$$
y(t) = e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \qquad (2.68)
$$

2.7. Metode Dekomposisi Adomian

Metode dekomposisi Adomian adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier berdasarkan nilai awal dan hasil perhitungannya cukup efektif untuk menghampiri penyelesaian eksak. Secara umum dapat dituliskan

$$
\begin{aligned}
Ly + Ry + Ny &= \phi(x) \\
Ly &= \phi(x) - Ry - Ny \\
L^{-1}Ly &= L^{-1}\phi(x) - L^{-1}Ry - L^{-1}Ny \qquad (2.69)
\end{aligned}
$$

dengan $L = \dfrac{d^n}{dx^n}$ adalah operator diferensial. Diasumsikan bahwa *invers* operator L^{-1} ada, dan L^{-1} merupakan integral sebanyak orde pada L terhadap x dari 0 sampai x. Misalkan diambil $n = 2$, maka $L = \dfrac{d^2}{dx^2}$ sehingga :

$$
L_{xx}^{-1}(.) = \int_0^x \int_0^x (.)\, dx dx
$$

Berdasarkan persamaan (2.69), maka untuk persamaan diferensial orde dua dapat dijabarkan kembali dalam bentuk

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + L_{xx}^{-1}\phi(x) - L_{xx}^{-1}Ry - L_{xx}^{-1}Ny \tag{2.70}$$

diasumsikan bahwa Ny adalah deret polinomial Adomian A_n, ditulis

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.71}$$

Misalkan $Ny = f(y)$, maka

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, ..., y_n) \tag{2.72}$$

Oleh karena deret polinomial Adomian $A_i(i = 0, 1, ..., n)$ bergantung pada $y_0, y_1, ..., y_n$ dan merupakan deret konvergen, sehingga

$$A_0 = f(y_0) \tag{2.73}$$

Maka

$$A_1 = y_1\left(\frac{\partial}{\partial y_0}f(y_0)\right) \tag{2.74}$$

$$A_2 = y_2\left(\frac{\partial}{\partial y_0}f(y_0)\right)+\left(\frac{y_1^2}{2!}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}f(y_0)\right) \tag{2.75}$$

$$A_3 = y_3\left(\frac{\partial}{\partial y_0}f(y_0)\right)+y_1y_2\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}f(y_0)\right)+\left(\frac{y_1^3}{3!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^3}f(y_0)\right) \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned} A_4 = {} & y_4\left(\frac{\partial}{\partial y_0}f(y_0)\right)+\left(\frac{y_2^2}{2!}+y_1y_3\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}f(y_0)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}f(y_0)\right)+ \\ & \left(\frac{y_1^2y_2}{2!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^3}f(y_0)\right)+\left(\frac{y_1^4}{4!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^3}f(y_0)\right) \\ & \vdots \end{aligned} \tag{2.77}$$

Sehingga $f(y)$ dapat disusun kembali dalam bentuk deret sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum A_n(y_0, y_1, ..., y_n) \\ &= f(y_0) + y_1\left(\frac{\partial}{\partial y_0}f(y_0)\right)+y_2\left(\frac{\partial}{\partial y_0}f(y_0)\right)+\left(\frac{y_1^2}{2!}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}f(y_0)\right)+ \\ & \quad y_3\left(\frac{\partial}{\partial y_0}f(y_0)\right)+y_1y_2\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}f(y_0)\right)+\left(\frac{y_1^3}{3!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^3}f(y_0)\right)+ \end{aligned}$$

$$y_4\left(\frac{\partial}{\partial y_0}f(y_0)\right)+\left(\frac{y_2^2}{2!}+y_1y_3\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}f(y_0)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}f(y_0)\right)+$$

$$\left(\frac{y_1^2y_2}{2!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^3}f(y_0)\right)+\left(\frac{y_1^4}{4!}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial y_0^3}f(y_0)\right)+\dots$$

$$= f(y_0)+(y_0+y_1+\,\dots)\left(\frac{\partial}{\partial y_0}f(y_0)\right)+\left(\frac{y_1^2}{2!}+y_1y_2+\,\dots\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}f(y_0)\right)+\dots$$

$$= f(y_0)+\left[\left(\frac{y-y_0}{1!}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y_0}f(y_0)\right)\right]+\left[\left(\frac{(y-y_0)^2}{2!}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_0^2}f(y_0)\right)\right]+\,\dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(y-y_0)^n}{n!}\right)\left(\frac{\partial^n}{\partial y_0^n}f(y_0)\right) \tag{2.78}$$

Fungsi $y(x)$ merupakan jumlah komponen-komponen yang dapat didefinisikan sebagai deret dekomposisi yaitu deret $y_0(x), y_1(x), y_2(x),$ ...yang ditulis

$$y(x) = y_0(x)+y_1(x)+y_2(x)+\,\dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \tag{2.79}$$

Persamaan (2.79) dapat diuraikan kembali menjadi

$$y(x) = y_0(x) - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.80}$$

dengan

$$y_0(x) = y(0) + xy'(0) + L_{xx}^{-1}\phi(x) \tag{2.81}$$

dan

$$y_1(x) = -L^{-1}Ry_0 - L^{-1}A_0 \tag{2.82}$$

$$y_2(x) = -L^{-1}Ry_1 - L^{-1}A_1 \tag{2.83}$$

$$y_3(x) = -L^{-1}Ry_2 - L^{-1}A_2 \tag{2.84}$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1}(x) = -L^{-1}Ry_n - L^{-1}A_n \tag{2.85}$$

Setelah nilai suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x),\,\dots, y_{n+1}(x)$ diperoleh, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) \tag{2.86}$$

dengan

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k(x)$$

Pada persamaan (2.69), jika $Ny = 0$ maka persamaan merupakan persamaan linier, sehingga persamaan (2.70) menjadi

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + L_{xx}^{-1}\phi(x) - L_{xx}^{-1}Ry \tag{2.87}$$

dengan

$$y_0(x) = y(0) + xy'(0) + L_{xx}^{-1}\phi(x) \tag{2.88}$$

dan

$$y_1(x) = -L_{xx}^{-1}Ry_0 \tag{2.89}$$

$$y_2(x) = -L_{xx}^{-1}Ry_1 \tag{2.90}$$

$$y_3(x) = -L_{xx}^{-1}Ry_2 \tag{2.91}$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1}(x) = -L_{xx}^{-1}Ry_n \tag{2.92}$$

Dengan cara yang sama untuk persamaan nonlinier, setelah nilai suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{n+1}(x)$ diperoleh, maka penyelesaian dapat diperoleh dengan menggunakan hampiran persamaan (2.86).

Contoh 2.9

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial nonlinier berikut

$$y'' + 2y' + y + 8y^3 = e^{-3x} \tag{2.93}$$

dengan masalah nilai awalnya $y(0) = \dfrac{1}{2}$ dan $y'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Penyelesaian :

Langkah pertama yang harus dilakukan terlebih dahulu untuk menyelesaikan persamaan (2.93) yaitu menentukan nilai y_0, yang ditulis

$$y_0(x) = y(0) + xy'(0) + L_{xx}^{-1}\phi(x)$$

Berdasarkan nilai awal $y(0) = \dfrac{1}{2}$ dan $y'(0) = -\dfrac{1}{2}$, maka

$$y_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \int_0^x \int_0^x e^{-3x}\ dxdx$$

Oleh karena, $e^{-3x} = 1 - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4$, maka

$$y_0(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{9}{40}x^5 + \frac{9}{80}x^6$$

Untuk memperoleh nilai $y_1(x)$, maka harus dicari terlebih dahulu nilai A_0 menggunakan persamaan (2.73), yaitu :

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^3 \\ &= \frac{1}{8} - \frac{3}{8}x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{57}{32}x^4 - \frac{357}{160}x^5 + \frac{161}{64}x^6 - \ldots + \frac{729}{512000}x^{18} \end{aligned}$$

Oleh karena,

$$y_1(x) = -L_{xx}^{-1}y_0 - 2L_{xx}^{-1}y_0' - 8L_{xx}^{-1}A_0$$

maka

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^x \int_0^x y_0 \; dxdx - 2\int_0^x \int_0^x y_0' \; dxdx - 8\int_0^x \int_0^x A_0 \; dxdx \\ &= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{3}{8}x^5 - \frac{33}{80}x^6 + \ldots - \frac{729}{24320000} \end{aligned}$$

Selanjutnya nilai A_1 diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.74), yaitu :

$$\begin{aligned} A_1 &= 3y_0^2 y_1 \\ &= -\frac{3}{16}x^2 + \frac{9}{16}x^3 - \frac{37}{32}x^4 + \frac{65}{32}x^5 - \frac{999}{320}x^6 + \ldots - \frac{177147}{155648000000}x^{32} \end{aligned}$$

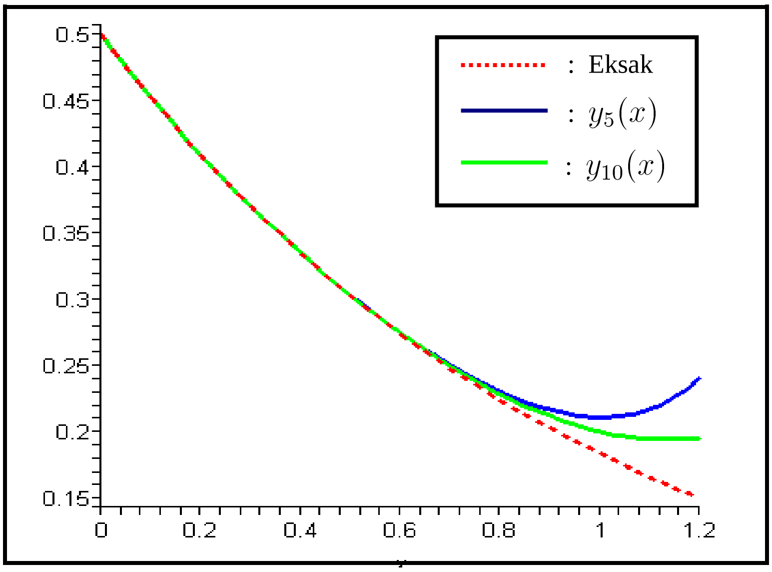
Maka

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \int_0^x \int_0^x y_1 \; dxdx - 2\int_0^x \int_0^x y_1' \; dxdx - 8\int_0^x \int_0^x A_1 \; dxdx \\ &= \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{29}{240}x^5 + \frac{139}{720}x^6 - \ldots + \frac{59049}{7276544000000} \end{aligned}$$

Penyelesaian persaman diperoleh dengan menjumlahkan suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{5}{48}x^4 - \ldots + \frac{59049}{7276544000000}x^{34} \end{aligned}$$

Gambar 2.1 menunjukkan akurasi penyelesain persamaan (2.93) untuk jumlah suku lima $y_5(x)$ dan jumlah suku sepuluh $y_{10}(x)$ yang digunakan terhadap penyelesaian eksaknya di $0 \leq x \leq 1,2$.



Gambar 2.1 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial nonlinier $y'' + 2y' + y + 8y^3 = e^{-3x}$ dengan nilai awal $y(0) = \frac{1}{2}$ dan $y'(0) = -\frac{1}{2}$ di $0 \leq x \leq 1,2$ untuk beberapa jumlah suku.

Berdasarkan Gambar 2.1, dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh $y_{10}(x)$ lebih mendekati nilai eksaknya dibandingkan kurva $y_5(x)$. Hal ini menunjukkan bahwa semakin banyak jumlah suku yang digunakan maka semakin mendekati penyelesaian eksaknya.

2.8. Metode Dekomposisi Adomian Laplace

Metode Dekomposisi Adomian Laplace adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier yang mengkombinasikan antara transformasi Laplace dengan metode dekomposisi Adomian yang hasil perhitungannya cukup efektif untuk menghampiri penyelesaian eksak. Secara umum dapat dituliskan

$$\mathcal{L}\{Ly + Ry + Ny\} = \mathcal{L}\{\phi(x)\}$$

$$\mathcal{L}\{Ly\} = \mathcal{L}\{\phi(x)\} - \mathcal{L}\{Ry\} - \mathcal{L}\{Ny\} \quad (2.94)$$

dengan $L = \frac{d^n}{dx^n}$ merupakan operator diferensial.

Untuk persamaan (2.94), jika diambil nilai $n = 2$ dan nilai Ry memenuhi bentuk persamaan diferensial orde satu berikut

$$p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

maka

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = \mathcal{L}\{\phi(x)\} - \mathcal{L}\left\{p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y\right\} - \mathcal{L}\{Ny\} \tag{2.95}$$

Berdasarkan sifat kelinieran transformasi Laplace, maka persamaan (2.95) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = \mathcal{L}\{\phi(x)\} - p(x)\mathcal{L}\{\frac{dy}{dx}\} - q(x)\mathcal{L}\{y\} - \mathcal{L}\{Ny\} \tag{2.96}$$

Penerapan sifat turunan pertama dan kedua pada transformasi Laplace untuk persamaan (2.96) akan diperoleh persamaan berbentuk

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) = \mathcal{L}\{\phi(x)\} - p(x)(\mathcal{L}\{y\} - y(0)) - \\ q(x)\mathcal{L}\{y\} - \mathcal{L}\{Ny\} \end{aligned} \tag{2.97}$$

Andaikan diberikan nilai awal $y(0) = \alpha$ dan $y'(0) = \beta$, maka persamaan (2.97) menjadi

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - s\alpha - \beta = \mathcal{L}\{\phi(x)\} - p(x)(s\mathcal{L}\{y\} - \alpha) - q(x)\mathcal{L}\{y\} - \mathcal{L}\{Ny\}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y\} = \frac{\alpha(s + p(x))}{s^2 + p(x)s} + \frac{\beta}{s^2 + p(x)s} + \frac{1}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{\phi(x)\} - \\ \frac{q(x)}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{y\} - \frac{1}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{Ny\} \end{aligned} \tag{2.98}$$

Oleh karena,

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \tag{2.99}$$

dan

$$Ny = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \tag{2.100}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (2.99) dan persamaan (2.100) ke dalam persamaan (2.98), maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2 + p(x)s} + \frac{1}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{\phi(x)\} - \frac{q(x)}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} -$$

$$\frac{1}{s^2+p(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\} \tag{2.101}$$

Persamaan (2.101) dapat diuraikan kembali menjadi

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2+p(x)s} + \frac{1}{s^2+p(x)s}\mathcal{L}\{\phi(x)\} \tag{2.102}$$

maka

$$\mathcal{L}\{y_1\} = -\frac{q(x)}{s^2+p(x)s}\mathcal{L}\{y_0\} - \frac{1}{s^2+p(x)s}\mathcal{L}\{A_0\} \tag{2.103}$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = -\frac{q(x)}{s^2+p(x)s}\mathcal{L}\{y_1\} - \frac{1}{s^2+p(x)s}\mathcal{L}\{A_1\} \tag{2.104}$$

$$\mathcal{L}\{y_3\} = -\frac{q(x)}{s^2+p(x)s}\mathcal{L}\{y_2\} - \frac{1}{s^2+p(x)s}\mathcal{L}\{A_2\} \tag{2.105}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{y_{n+1}\} = -\frac{q(x)}{s^2+p(x)s}\mathcal{L}\{y_i\} - \frac{1}{s^2+p(x)s}\mathcal{L}\{A_i\} \tag{2.106}$$

Apabila $Ny = 0$, maka persamaan (2.94) disebut persamaan linier dan dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{Ly\} = \mathcal{L}\{\phi(x)\} - \mathcal{L}\{Ry\} \tag{2.107}$$

dengan $L = \dfrac{d^n}{dx^n}$ merupakan operator diferensial.

Untuk persamaan (2.107), jika diambil nilai $n = 2$ dan nilai Ry memenuhi bentuk persamaan diferensial orde satu berikut

$$p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

maka

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = \mathcal{L}\{\phi(x)\} - \mathcal{L}\left\{p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y\right\} \tag{2.108}$$

Berdasarkan sifat kelinieran pada transformasi Laplace, maka persamaan (2.108) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = \mathcal{L}\{\phi(x)\} - p(x)\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} - q(x)\mathcal{L}\{y\} \tag{2.109}$$

Penerapan sifat turunan pertama dan kedua pada transformasi Laplace untuk persamaan (2.109) akan diperoleh persamaan berbentuk

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) = \mathcal{L}\{\phi(x)\} - p(x)(\mathcal{L}\{y\} - y(0)) - q(x)\mathcal{L}\{y\} \tag{2.110}$$

Andaikan diberikan nilai awal $y(0) = \alpha$ dan $y'(0) = \beta$, maka persamaan (2.110) akan menjadi

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - s\alpha - \beta = \mathcal{L}\{\phi(x)\} - p(x)(s\mathcal{L}\{y\} - \alpha) - q(x)\mathcal{L}\{y\}$$

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\alpha(s + p(x))}{s^2 + p(x)s} + \frac{\beta}{s^2 + p(x)s} + \frac{1}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{\phi(x)\} - \frac{q(x)}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{y\} \tag{2.111}$$

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan persamaan (2.99) dan persamaan (2.100) ke dalam persamaan (2.111), maka diperoleh

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2 + p(x)s} + \frac{1}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{\phi(x)\} - \frac{q(x)}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} \tag{2.112}$$

Persamaan (2.112) dapat diuraikan kembali menjadi

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2 + p(x)s} + \frac{1}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{\phi(x)\} \tag{2.113}$$

maka

$$\mathcal{L}\{y_1\} = -\frac{q(x)}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{y_0\} \tag{2.114}$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = -\frac{q(x)}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{y_1\} \tag{2.115}$$

$$\mathcal{L}\{y_3\} = -\frac{q(x)}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{y_2\} \tag{2.116}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{y_{i+1}\} = -\frac{q(x)}{s^2 + p(x)s}\mathcal{L}\{y_i\} \tag{2.117}$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi pustaka dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan pokok permasalahan. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua dengan bentuk umum $p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y + f(y) = g(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$ dan $y'(0) = \beta$ serta komponen nonliniernya $Ny = f(y)$ yang merupakan deret polinomial Adomian A_n yang ditulis sebagai $Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$.

2. Mengubah persamaan $p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y + f(y) = g(x)$ ke dalam bentuk transformasi Laplace menggunakan aturan-aturan yang berlaku pada tranformasi Laplace.

3. Mendapatkan nilai $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, selanjutnya diubah ke dalam bentuk transformasi Laplace menggunakan aturan-aturan yang berlaku pada tranformasi Laplace.

4. Selanjutnya mencari nilai-nilai $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} (n = 0, 1, 2, \ldots)$ dengan menggunakan invers transformasi Laplace.

5. Terakhir menjumlahkan nilai-nilai $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ yang merupakan penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua tersebut.

BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembahasan pada bab ini adalah tentang penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua yang nonhomogen dan homogen menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.

4.1. Persamaan Nonhomogen

Pertimbangkan kembali persamaan diferensial biasa nonlinear orde dua berikut

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y+f(y)=g(x) \tag{4.1}$$

dengan nilai awal $y(0)=\alpha$ dan $y'(0)=\beta$.

Penerapan transformasi Laplace untuk kedua ruas pada persamaan (4.1) dapat ditulis

$$\mathcal{L}\left\{p(x)\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y+f(y)\right\}=\mathcal{L}\{g(x)\} \tag{4.2}$$

Berdasarkan sifat kelinieran pada transformasi Laplace, maka persamaan (4.2) dapat diubah dalam bentuk

$$\mathcal{L}\left\{p(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right\}+\mathcal{L}\left\{q(x)\frac{dy}{dx}\right\}+\mathcal{L}\{r(x)y\}+\mathcal{L}\{f(y)\}=\mathcal{L}\{g(x)\}$$

$$p(x)\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}+q(x)\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\}+r(x)\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{f(y)\}=\mathcal{L}\{g(x)\} \tag{4.3}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan tranformasi Laplace untuk turunan pertama dan kedua pada persamaan (4.3), sehingga diperoleh

$$p(x)(s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0))+q(x)(s\mathcal{L}\{y\}-y(0))+r(x)\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{f(y)\}=\mathcal{L}\{g(x)\}$$

$$p(x)s^2\mathcal{L}\{y\}-p(x)sy(0)-p(x)y'(0)+q(x)s\mathcal{L}\{y\}-q(x)y(0)+r(x)\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{f(y)\}=\mathcal{L}\{g(x)\}$$

$$\big(p(x)s^2+q(x)s\big)\mathcal{L}\{y\}=y(0)\big(sp(x)+q(x)\big)+p(x)y'(0)-r(x)\mathcal{L}\{y\}-$$

$$\mathcal{L}\{f(y)\}+\mathcal{L}\{g(x)\}$$

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{y(0)\big(sp(x)+q(x)\big)}{p(x)s^2+q(x)s}+\frac{p(x)y'(0)}{p(x)s^2+q(x)s}+\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{g(x)\}-$$

$$\frac{r(x)}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{y\}-\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{f(y)\}$$

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{y(0)}{s}+\frac{y'(0)}{p(x)^2s^2+p(x)q(x)s}+\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{g(x)\}-$$

$$\frac{r(x)}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{y\}-\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{f(y)\} \tag{4.4}$$

dengan nilai awal $y(0)=\alpha$ dan $y'(0)=\beta$. Persamaan (4.4) dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{p(x)^2s^2+p(x)q(x)s}+\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{g(x)\}-$$

$$\frac{r(x)}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{y\}-\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{f(y)\} \tag{4.5}$$

Oleh karena, penyelesaian untuk persamaan (4.1) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $y(x)$ yang merupakan deret $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$, ditulis

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x)+y_1(x)+y_2(x)+\ \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Maka persamaan (4.5) dapat diuraikan kembali dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{y_0\}-\frac{r(x)}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{y\}-\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{f(y)\} \tag{4.7}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\}=\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{p(x)^2s^2+p(x)q(x)s}+\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{g(x)\}$$

Selanjutnya, pada persamaan (4.7) komponen y pada ruas kanan dapat diekspansi menggunakan deret $y_0, y_1, y_2, \ldots$, ditulis

$$y=\sum_{i=0}^{\infty} y_i \tag{4.8}$$

dan untuk komponen nonlinier $f(y)$ diekspansi menggunakan deret polinomial Adomian A_i, ditulis

$$f(y)=\sum_{i=0}^{\infty} A_i \tag{4.9}$$

Maka persamaan (4.7) menjadi

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} - \frac{r(x)}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\} \tag{4.10}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{p(x)^2 s^2 + p(x)q(x)s} + \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{g(x)\} \tag{4.11}$$

dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y_1\} &= -\frac{r(x)}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_0\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_0\} \\
\mathcal{L}\{y_2\} &= -\frac{r(x)}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_1\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_1\} \\
&\vdots \\
\mathcal{L}\{y_{i+1}\} &= -\frac{r(x)}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_i\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_i\} \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Untuk nilai $p(x) = 0$, maka persamaan (4.7) dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} - \frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\} \tag{4.13}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{g(x)\} \tag{4.14}$$

dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y_1\} &= -\frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\{y_0\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{A_0\} \\
\mathcal{L}\{y_2\} &= -\frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\{y_1\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{A_1\} \\
&\vdots \\
\mathcal{L}\{y_{i+1}\} &= -\frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\{y_i\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{A_i\} \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk nilai $p(x) = 1$ persamaan (4.7) menjadi

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} - \frac{r(x)}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} - \frac{1}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\} \tag{4.16}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} \quad = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2 + q(x)s} + \frac{1}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{g(x)\} \tag{4.17}$$

dan

$$\mathcal{L}\{y_1\} \quad = -\frac{r(x)}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_0\} - \frac{1}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_0\}$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} \quad = -\frac{r(x)}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_1\} - \frac{1}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_1\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{y_{i+1}\} = -\frac{r(x)}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_i\} - \frac{1}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_i\} \tag{4.18}$$

Berdasarkan persamaan (4.1) untuk nilai $p(x) = 0$, $q(x) = 1$, dan $f(y) = y^2$, maka akan diperoleh persamaan Riccati. Selanjutnya, jika nilai $p(x) = 1, q(x) = 0$, $r(x) = x, g(x) = \mu$, dan $f(y) = 2y^3$ maka akan diperoleh persamaan Painleve.

4.1.1. Persamaan Riccati

Persamaan Riccati merupakan persamaan diferensial nonlinier orde satu yang mempunyai bentuk umum

$$\frac{dy}{dx} = r(x)y + s(x)y^2 + g(x), \quad y(0) = \alpha \tag{4.19}$$

dengan $r(x), s(x),$ dan $g(x)$ adalah fungsi skalar.

Untuk mencari penyelesaian persamaan (4.19) dapat menggunakan persamaan berikut

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{g(x)\} + \frac{r(x)}{s}\mathcal{L}\{y\} + \frac{s(x)}{s}\mathcal{L}\{f(y)\} \tag{4.20}$$

Oleh karena, penyelesaian untuk persamaan (4.20) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $y(x)$ yang merupakan deret $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$, ditulis

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ \ldots$$

Maka persamaan (4.20) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} + \frac{r(x)}{s}\mathcal{L}\{y\} + \frac{s(x)}{s}\mathcal{L}\{f(y)\} \tag{4.21}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{g(x)\}$$

Selanjutnya, pada persamaan (4.21) komponen y pada ruas kanan dapat diekspansi menggunakan deret $y_0, y_1, y_2, \ldots$ menggunakan persamaan (4.8) dan untuk komponen nonlinier $f(y)$ diekspansi menggunakan deret polinomial Adomian A_i menggunakan persamaan (4.9). Sehingga persamaan (4.21) menjadi

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} + \frac{r(x)}{s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} + \frac{s(x)}{s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\} \tag{4.22}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{g(x)\} \tag{4.23}$$

dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y_1\} &= \frac{r(x)}{s}\mathcal{L}\{y_0\} + \frac{s(x)}{s}\mathcal{L}\{A_0\} \\
\mathcal{L}\{y_2\} &= \frac{r(x)}{s}\mathcal{L}\{y_1\} + \frac{s(x)}{s}\mathcal{L}\{A_1\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{y_{i+1}\} = \frac{r(x)}{s}\mathcal{L}\{y_i\} + \frac{s(x)}{s}\mathcal{L}\{A_i\} \tag{4.24}$$

Contoh 4.1

Tentukan penyelesaian persamaan Riccati berikut

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + 1 \tag{4.25}$$

dengan $y(0) = 0$ dan nilai eksak $y(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Penyelesain :

Berdasarkan persamaan (4.22), maka untuk mencari penyelesaian persamaan (4.25) dapat dilakukan dengan menentukan nilai $y_0(x)$ terlebih dahulu dengan menggunakan persamaan (4.23), yaitu

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{g(x)\}$$

$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{1\}$$

$$= \frac{1}{s^2} \tag{4.26}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.26) diperoleh

$$y_0(x) = x \tag{4.27}$$

Untuk memperoleh nilai $y_1(x)$, maka harus dicari nilai A_0 menggunakan persamaan (2.66) dan nilai $y_1(x)$ menggunakan persamaan (4.24), yaitu

$$A_0 = y_0^2$$

$$= x^2$$

maka

$$\mathcal{L}\{y_1\} = \frac{r(x)}{s}\mathcal{L}\{y_0\} + \frac{s(x)}{s}\mathcal{L}\{A_0\}$$

$$= -\frac{1}{s}\mathcal{L}\{x^2\}$$

$$= -\frac{1}{s}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}$$

$$= -\frac{2}{s^4} \tag{4.28}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.28) diperoleh

$$y_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 \tag{4.29}$$

Untuk memperoleh nilai $y_2(x)$, maka harus dicari nilai A_1 menggunakan persamaan (2.67) dan nilai $y_2(x)$ menggunakan persamaan (4.24), yaitu

$$A_1 = 2y_0y_1$$

$$= -\frac{2}{3}x^4$$

maka

$$\mathcal{L}\{y_2\} = \frac{r(x)}{s}\mathcal{L}\{y_1\} + \frac{s(x)}{s}\mathcal{L}\{A_1\}$$

$$= -\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{-\frac{2}{3}x^4\right\}$$

$$= -\frac{1}{s}\left\{-\frac{16}{s^5}\right\}$$

$$= \frac{16}{s^6} \tag{4.30}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.30) diperoleh

$$y_2(x) = \frac{2}{15}x^5 \tag{4.31}$$

Untuk memperoleh nilai $y_3(x)$, maka harus dicari nilai A_2 menggunakan persamaan (2.68) dan nilai $y_3(x)$ menggunakan persamaan (4.24), yaitu

$$A_2 = 2y_0y_2 + y_1^2$$

$$= \frac{17}{45}x^6$$

maka

$$\mathcal{L}\{y_3\} = \frac{r(x)}{s}\mathcal{L}\{y_2\} + \frac{s(x)}{s}\{A_2\}$$

$$= -\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{17}{45}x^6\right\}$$

$$= \frac{1}{s}\left\{\frac{272}{s^7}\right\}$$

$$= -\frac{272}{s^8} \tag{4.32}$$

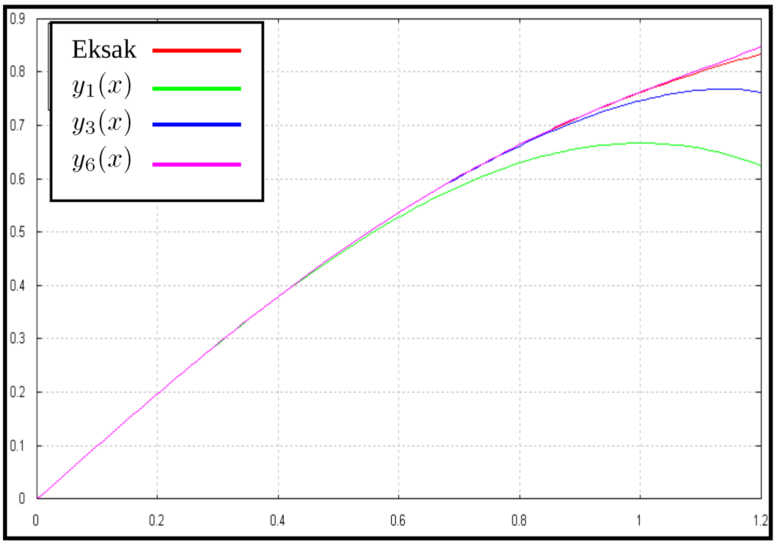
Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.32) diperoleh

$$y_3(x) = -\frac{17}{315}x^7 \tag{4.33}$$

Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ \ldots$ atau ditulis

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + \ \ldots$$
$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \ \ldots$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.25) bergantung kepada banyaknya suku yang dijumlahkan. Gambar 4.1 memperlihatkan akurasi penyelesaian persamaaan (4.25) menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk jumlah suku satu $\big(y_1(x)\big)$, jumlah suku tiga $\big(y_3(x)\big)$, dan jumlah suku enam $\big(y_6(x)\big)$ di $0 \leq x \leq 1,2.$



Gambar 4.1 Hampiran penyelesaian persamaan Riccati $y' = -y^2 + 1$ dengan nilai awal $y(0) = 0$ di $0 \leq x \leq 1,2$ untuk beberapa jumlah suku.

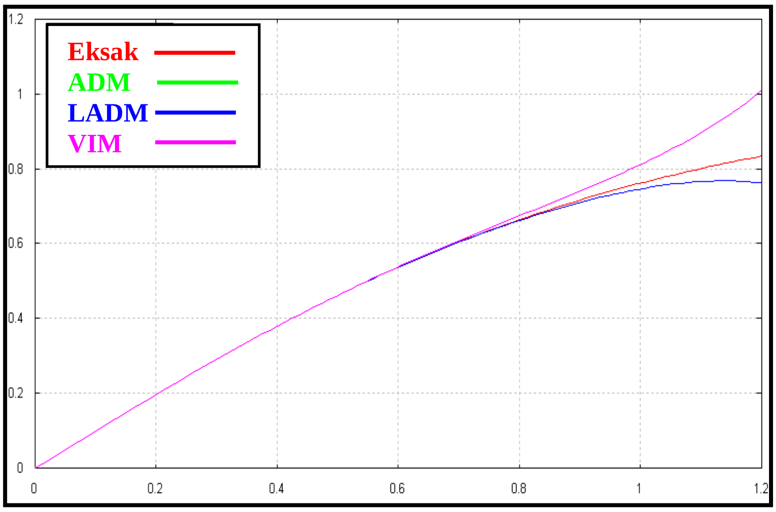
Berdasarkan Gambar 4.1 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh jumlah suku enam $(y_6(x))$ lebih mendekati nilai eksak dibandingkan kurva jumlah suku satu $(y_1(x))$ dan kurva jumlah suku tiga $(y_3(x))$. Hal ini menjelaskan bahwa suku lebih banyak akan mendekati penyelesaian eksak.

Tabel 4.1 yang memperlihatkan perbandingan penyelesaian persamaan (4.25) menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace (LADM), metode dekomposisi Adomian (ADM), dan metode iterasi varitional (VIM) dengan nilai awal $y(0) = 0$ serta jumlah suku tiga $(y_3(x))$ di $0,1 \leq x \leq 1$.

Tabel 4.1 Perbandingan penyelesaian persamaan Riccati $y' = -y^2 + 1$ dengan nilai awal $y(0) = 0$ di $0,1 \leq x \leq 1$ untuk jumlah suku tiga $(y_3(x))$.

x	Eksak	Metode		
		ADM	VIM	LADM
0,1	0,0996679956	0,0996679946	0,0996679946	0,0996679946
0,2	0,1973753203	0,1973753092	0,1973753160	0,1973753092
0,3	0,2913126124	0,2913121971	0,2913124564	0,2913121971
0,4	0,3799489622	0,3799435784	0,3799469862	0,3799435784
0,5	0,4621171572	0,4620783730	0,4621033328	0,4620783730
0,6	0,5370495670	0,5368572343	0,5369833784	0,5368572343
0,7	0,6043677771	0,6036314822	0,6041244734	0,6036314822
0,8	0,6640367702	0,6617060368	0,6633009217	0,6617060368
0,9	0,7162978702	0,7099191514	0,7143823394	0,7099191514
1,0	0,7615941560	0,7460317460	0,7571662670	0,7460317460

Gambar 4.2 menunjukan perbandingan akurasi penyelesaian persamaan (4.44) menggunakan metode dekomposiai Adomian Laplace (LADM), metode dekomposisi Adomian (ADM), dan metode iterasi variasi (VIM) untuk jumlah suku tiga $(y_3(x))$ terhadap penyelesaian eksak di $0 \leq x \leq 1,2$.



Gambar 4.2 Perbandingan penyelesaian persamaan Riccati $y' = -y^2 + 1$ dengan nilai awal $y(0) = 0$ di $0 \leq x \leq 1,2$ menggunakan LADM, ADM, dan VIM.

Berdasarkan Gambar 4.2 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh metode dekomposisi Adomian Laplace dan metode dekomposisi Adomian lebih mendekati nilai eksak dibandingkan kurva yang dibetuk oleh metode iterasi variasi. Berdasarkan Gambar 4.2 juga terlihat bahwa kurva metode dekomposisi Adomian Laplace dan kurva metode dekomposisi Adomian berimpit. Hal ini menunjukkan bahwa kedua metode tersebut memberikan penyelesaian yang sama untuk menyelesaikan persamaan (4.44).

4.1.2. Persamaan Painleve

Persamaan Painleve merupakan persamaan diferensial nonlinier orde dua yang mempunyai bentuk umum

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2y^3 + xy + \mu, \quad y(0) = \alpha \text{ dan } y'(0) = \beta \tag{4.34}$$

dengan μ merupakan parameter dari persamaan tersebut.

Selanjutnya, untuk mencari penyelesaian persamaan (4.34) dapat menggunakan persamaan

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{\mu\} + \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{f(y)\} \tag{4.35}$$

Oleh karena, penyelesaian untuk persamaan (4.35) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $y(x)$ yang merupakan deret $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$, ditulis

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) \end{aligned}$$

Maka persamaan (4.36) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} + \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y\} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{f(y)\} \tag{4.37}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{\mu\}$$

Selanjutnya, pada persamaan (4.37) komponen y pada ruas kanan dapat diekspansi menggunakan deret $y_0, y_1, y_2, \ldots$ menggunakan persamaan (4.8) dan untuk komponen nonlinier $f(y)$ diekspansi menggunakan deret polinomial Adomian A_i menggunakan persamaan (4.9). Sehingga persamaan (4.37) menjadi

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} + \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\} \tag{4.38}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} \quad = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{\mu\} \tag{4.39}$$

dan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y_1\} \quad &= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y_0\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_0\} \\ \mathcal{L}\{y_2\} \quad &= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y_1\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_1\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{y_{i+1}\} = \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y_i\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_i\} \tag{4.40}$$

Contoh 4.2

Tentukan penyelesaian dari persamaan Painleve berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy + 2y^3 + 5 \tag{4.41}$$

dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$.

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan (4.38), maka untuk mencari penyelesaian persamaan (4.41) dapat dilakukan dengan menentukan nilai $y_0(x)$ terlebih dahulu dengan menggunakan persamaan (4.39), yaitu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_0\} &= \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{\mu\} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{5\} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{5}{s^3} \end{aligned} \tag{4.42}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.42) diperoleh

$$y_0(x) = 1 + \frac{5}{2}x^2 \tag{4.43}$$

Untuk memperoleh nilai $y_1(x)$, maka harus dicari nilai A_0 menggunakan persamaan (2.65) dan nilai $y_1(x)$ menggunakan persamaan (4.40), yaitu

$$\begin{aligned}A_0 &= y_0^3 \\ &= 1 + \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x^4 + \frac{125}{8}x^6\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_1\} &= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y_0\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_0\} \\ &= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\left\{1 + \frac{5}{2}x^2\right\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\left\{1 + \frac{15}{2}x^2 + \frac{75}{4}x^4 + \frac{125}{8}x^6\right\} \\ &= \frac{x}{s^2}\left\{\frac{1}{s} + \frac{5}{s^3}\right\} + \frac{2}{s^2}\left\{\frac{1}{s} + \frac{15}{s^3} + \frac{450}{s^5} + \frac{11250}{s^7}\right\} \\ &= \frac{x}{s^3} + \frac{5x}{s^5} + \frac{2}{s^3} + \frac{30}{s^5} + \frac{900}{s^7} + \frac{22500}{s^9}\end{aligned} \tag{4.44}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.44) diperoleh

$$y_1(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{24}x^5 + \frac{5}{4}x^6 + \frac{125}{224}x^8 \tag{4.45}$$

Dengan cara yang sama untuk memperoleh nilai $y_2(x)$, maka harus dicari nilai A_1 menggunakan persamaan (2.66) dan nilai $y_2(x)$ menggunakan persamaan (4.40), yaitu

$$\begin{aligned}
A_1 &= 3y_0^2 y_1 \\
&= 3x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{75}{4}x^4 + \frac{65}{8}x^5 + \frac{165}{4}x^6 + \frac{25}{2}x^7 + \frac{9825}{224}x^8 + \frac{125}{32}x^9 + \\
&\quad \frac{7125}{224}x^{10} + \frac{9375}{896}x^{12}
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y_2\} &= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{y_1\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_1\} \\
&= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\left\{x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{24}x^5 + \frac{5}{4}x^6 + \frac{124}{224}x^8\right\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\left\{3x^2 + \right. \\
&\quad \frac{3}{2}x^3 + \frac{75}{4}x^4 + \frac{65}{8}x^5 + \frac{165}{4}x^6 + \frac{25}{2}x^7 + \frac{9825}{224}x^8 + \frac{125}{32}x^9 + \\
&\quad \left.\frac{7125}{224}x^{10} + \frac{9375}{896}x^{12}\right\} \\
&= \frac{x}{s^2}\left\{\frac{22500}{s^9} + \frac{900}{s^7} + \frac{25}{s^6} + \frac{30}{s^5} + \frac{3}{s^4} + \frac{2}{s^3}\right\} + \frac{2}{s^2}\left\{\frac{6}{s^3} + \frac{9}{s^4} + \right. \\
&\quad \frac{450}{s^5} + \frac{975}{s^6} + \frac{29700}{s^7} + \frac{63000}{s^8} + \frac{1768500}{s^9} + \frac{1417500}{s^{10}} + \\
&\quad \left.\frac{115425000}{s^{11}} + \frac{501187500}{s^{13}}\right\} \\
&= \frac{22500x}{s^{11}} + \frac{900x}{s^9} + \frac{25x}{s^8} + \frac{30x}{s^7} + \frac{3x}{s^6} + \frac{2x}{s^5} + \frac{12}{s^5} + \frac{18}{s^6} + \frac{900}{s^7} + \\
&\quad \frac{1950}{s^8} + \frac{59400}{s^9} + \frac{126000}{s^{10}} + \frac{3537000}{s^{11}} + \frac{2835000}{s^{12}} + \frac{230850000}{s^{13}} + \\
&\quad \frac{1002375000}{s^{15}}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

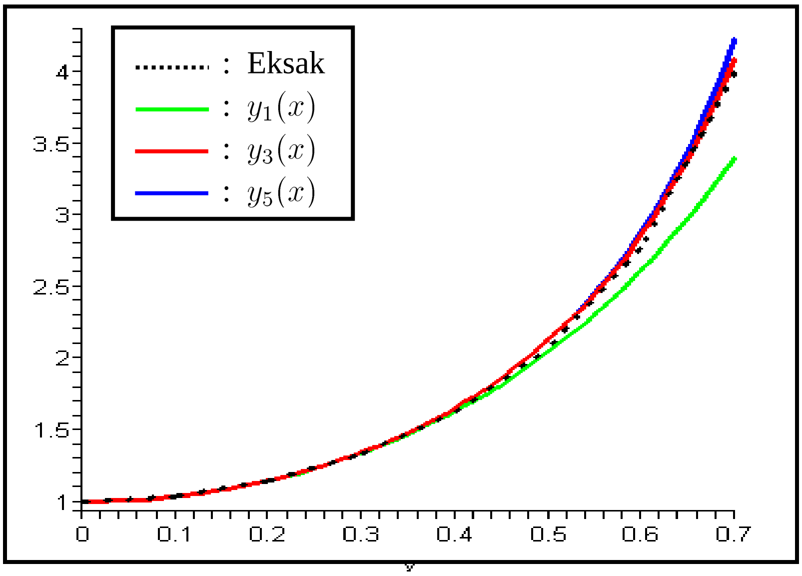
Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.46) diperoleh

$$y_2(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{30}x^5 + \frac{51}{40}x^6 + \frac{3}{7}x^7 + \frac{745}{504}x^8 + \frac{745}{2016}x^9 + \frac{655}{672}x^{10} + \frac{3425}{44352}x^{11} + \frac{2375}{4928}x^{12} + \frac{9375}{81536}x^{14} \tag{4.47}$$

Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ atau ditulis

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots \\ &= 1 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + \frac{53}{120}x^5 + \frac{101}{40}x^6 + \frac{3}{7}x^7 + \frac{4105}{2016}x^8 + \\ &\quad \frac{745}{2016}x^9 + \frac{665}{672}x^{10} + \frac{3425}{44352}x^{11} + \frac{2375}{4928}x^{12} + \frac{9375}{81536}x^{14} + \ldots \end{aligned}$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.41) bergantung kepada banyaknya jumlah suku yang dijumlahkan. Gambar 4.3 memperlihatkan akurasi penyelesaian persamaaan (4.41) menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk jumlah suku satu $(y_1(x))$, jumlah suku tiga $(y_3(x))$, dan jumlah suku lima $(y_5(x))$ di $0 \le x \le 0,7$.



Gambar 4.3 Hampiran penyelesaian persamaan Painleve $y'' = xy + 2y^3 + 5$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$ di $0 \le x \le 0,7$ untuk beberapa jumlah suku.

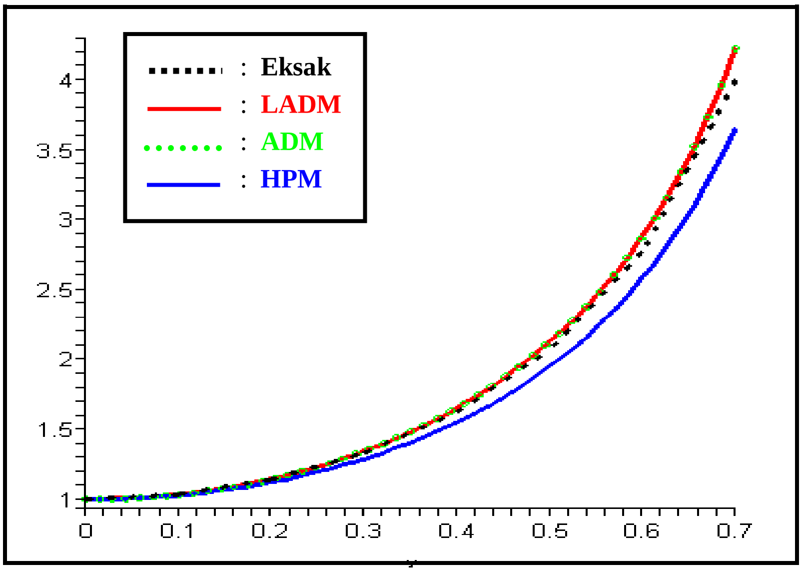
Berdasarkan Gambar 4.3 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh jumlah suku lima $\left(y_5(x)\right)$ lebih mendekati nilai eksak dibandingkan kurva jumlah suku satu $\left(y_1(x)\right)$ dan kurva jumlah suku tiga $\left(y_3(x)\right)$.

Tabel 4.2 menunjukkan perbandingan akurasi penyelesaian dari persamaan (4.41) menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace (LADM), metode dekomposisi Adomian (ADM), dan metode homotopi pertubasi (HPM) dengan jumlah suku lima $\left(y_5(x)\right)$.

Tabel 4.2 Perbandingan penyelesaian persamaan Painleve $y'' = xy + 2y^3 + 5$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$ di $-0,7 \leq x \leq 0,7$ untuk jumlah suku lima $\left(y_5(x)\right)$.

x	Eksak	Metode		
		ADM	HPM	LADM
-0,7	3,6877	3,4503	3,3841	3,4503
-0,6	2,6352	2,5271	2,4533	2,5271
-0,5	2,0139	1,9613	1,8901	1,9613
-0,4	1,6053	1,5810	1,5255	1,5810
-0,3	1,3263	1,3168	1,2814	1,3168
-0,2	1,1416	1,1389	1,1216	1,1389
-0,1	1,0350	1,0347	1,0300	1,0347
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,0353	1,0357	1,0304	1,0357
0,2	1,1444	1,1471	1,1244	1,1471
0,3	1,3366	1,3462	1,2915	1,3462
0,4	1,6323	1,6568	1,5525	1,6568
0,5	2,0757	2,1294	1,9513	2,1294
0,6	2,7706	2,8817	2,5839	2,8817
0,7	4,0022	4,2284	3,6573	4,2284

Gambar 4.4 menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian persamaan $y(x)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, metode pertubasi homotopi, dan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk jumlah suku lima $\left(y_5(x)\right)$ terhadap penyelesaian eksak untuk $0 \leq x \leq 0,7$.



Gambar 4.4 Perbandingan penyelesaian persamaan Painleve $y'' = xy + 2y^3 + 5$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$ di $0 \leq x \leq 0,7$ menggunakan LADM, ADM, dan HPM.

Berdasarkan gambar 4.2 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh $y_5(x)$ untuk metode dekomposisi Adomian dan metode dekomposisi Adomian Laplace lebih mendekati dibandingkan kurva metode homotopi pertubasi. Hal ini menjelaskan bahwa metode dekomposisi Adomian Laplace mempunyai hasil yang sama dengan metode dekomposisi Adomian dalam mendekati penyelesaian eksak dan memiliki hampiran yang lebih baik jika dibandingkan dengan metode homotopi pertubasi.

4.2. Persamaan Homogen

Persamaan (4.1) dikatakan homogen jika $g(x) = 0$, sehingga dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y + f(y) = 0 \tag{4.48}$$

dengan nilai awal $y(0) = \alpha$ dan $y'(0) = \beta$.

Penerapan transformasi Laplace untuk kedua ruas pada persamaan (4.48) dapat ditulis

$$\mathcal{L}\left\{p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y + f(y)\right\} = 0 \tag{4.49}$$

Berdasarkan sifat kelinieran pada transformasi Laplace, maka persamaan (4.49) dapat diubah dalam bentuk

$$\mathcal{L}\left\{p(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right\}+\mathcal{L}\left\{q(x)\frac{dy}{dx}\right\}+\mathcal{L}\{r(x)y\}+\mathcal{L}\{f(y)\}=0$$

$$p(x)\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\}+q(x)\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\}+r(x)\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{f(y)\}=0 \qquad (4.50)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan sifat transformasi Laplace untuk turunan pertama dan kedua pada persamaan (4.50), sehingga diperoleh

$$p(x)(s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0))+q(x)(s\mathcal{L}\{y\}-y(0))+r(x)\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{f(y)\}=0$$

$$p(x)s^2\mathcal{L}\{y\}-p(x)sy(0)-p(x)y'(0)+q(x)s\mathcal{L}\{y\}-q(x)y(0)+r(x)\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{f(y)\}=0$$

$$\big(p(x)s^2+q(x)s\big)\mathcal{L}\{y\}=y(0)\big(sp(x)+q(x)\big)+p(x)y'(0)-r(x)\mathcal{L}\{y\}-\mathcal{L}\{f(y)\}$$

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{y(0)\big(sp(x)+q(x)\big)}{p(x)s^2+q(x)s}+\frac{p(x)y'(0)}{p(x)s^2+q(x)s}+\frac{r(x)}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{y\}-$$

$$\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{f(y)\}$$

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{y(0)}{s}+\frac{y'(0)}{p(x)^2s^2+p(x)q(x)s}+\frac{r(x)}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{y\}-$$

$$\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{f(y)\} \qquad (4.51)$$

dengan nilai awal $y(0)=\alpha$ dan $y'(0)=\beta$. Persamaan (4.51) dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{p(x)^2s^2+p(x)q(x)s}-\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{y\}-$$

$$\frac{1}{p(x)s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{f(y)\} \qquad (4.52)$$

Oleh karena, penyelesaian untuk persamaan (4.48) merupakan komposisi fungsi-fungsi tak diketahui yaitu fungsi $y(x)$ yang merupakan deret $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$, ditulis

$$y(x)=y_0(x)+y_1(x)+y_2(x)+\ \ldots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}y_n(x)$$

Maka persamaan (4.52) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{f(y)\} \tag{4.53}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{p(x)^2 s^2 + p(x)q(x)s}$$

Selanjutnya, pada persamaan (4.53) komponen y pada ruas kanan dapat diekspansi menggunakan deret $y_0, y_1, y_2, \ldots$ menggunakan persamaan (4.8) dan untuk komponen nonlinier $f(y)$ diekspansi menggunakan deret polinomial Adomian A_i menggunakan persamaan (4.9). Sehingga persamaan (4.53) menjadi

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} - \frac{r(x)}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\} \tag{4.54}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} \quad = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{p(x)^2 s^2 + p(x)q(x)s} \tag{4.55}$$

dan

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y_1\} \quad &= -\frac{r(x)}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_0\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_0\} \\
\mathcal{L}\{y_2\} \quad &= -\frac{r(x)}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_1\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_1\} \\
&\vdots \\
\mathcal{L}\{y_{i+1}\} &= -\frac{r(x)}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_i\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_i\} \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Untuk nilai $p(x) = 0$, maka persamaan (4.54) dapat ditulis dalam bentuk

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} - \frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\} \tag{4.57}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} \quad = \frac{\alpha}{s} \tag{4.58}$$

dan

$$\mathcal{L}\{y_1\} \quad = -\frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\{y_0\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{A_0\}$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = -\frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\{y_1\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{A_1\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{y_{i+1}\} = -\frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\{y_i\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{A_i\} \tag{4.59}$$

Selanjutnya, untuk nilai $p(x) = 1$ persamaan (4.54) menjadi

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} - \frac{r(x)}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} - \frac{1}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\} \tag{4.60}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2 + q(x)s} \tag{4.61}$$

dan

$$\mathcal{L}\{y_1\} = -\frac{r(x)}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_0\} - \frac{1}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_0\}$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = -\frac{r(x)}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_1\} - \frac{1}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_1\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{y_{i+1}\} = -\frac{r(x)}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_i\} - \frac{1}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_i\} \tag{4.62}$$

Contoh 4.3

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial berikut :

$$y' = y(b + ay), \quad b > 0, a < 0, \text{dan } y(0) > 0 \tag{4.63}$$

dengan a dan b adalah konstanta dan penyelesaian eksaknya memenuhi persamaan

$$y(x) = \begin{cases} \frac{be^{bx}}{\frac{b+ay(0)}{y(0)} - ae^{bx}}, & \text{untuk } b \neq 0 \\ \frac{y(0)}{1 - ay(0)x}, & \text{untuk } b = 0 \end{cases}$$

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan (4.63) diperoleh $p(x) = 0, q(x) = 1, r(x) = -b,$ dan $g(x) = 0$. Oleh karena, $p(x) = 0$ maka untuk penyelesaian persamaan (4.63) dapat menggunakan persamaan (4.57).

Penyelesaian selanjutnya dilakukan dengan menentukan nilai $y_0(x)$ menggunakan persamaan (4.58), yaitu

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha}{s}$$

Oleh karena, nilai $y(0)$ belum ditetapkan, maka pada kasus ini diambil $y(0) = 0,1$, sehingga

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{0,1}{s} \tag{4.64}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.64) diperoleh

$$y_0(x) = \frac{1}{10} \tag{4.65}$$

Untuk memperoleh nilai $y_1(x)$, maka harus dicari nilai A_0 menggunakan persamaan (2.65) dan nilai $y_1(x)$ menggunakan persamaan (4.59) , yaitu

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^2 \\ &= \frac{1}{100} \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y_1\} &= -\frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\{y_0\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{A_0\} \\ &= \frac{b}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{10}\right\} + \frac{a}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{100}\right\} \\ &= \frac{b}{s}\left\{\frac{1}{10s}\right\} + \frac{a}{s}\left\{\frac{1}{100s}\right\} \\ &= \frac{b}{10s^2} + \frac{a}{100s^2} \end{aligned} \tag{4.66}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.66) diperoleh

$$y_1(x) = \frac{1}{10}bx + \frac{1}{100}ax \tag{4.67}$$

Untuk memperoleh nilai $y_2(x)$, maka harus dicari nilai A_1 menggunakan persamaan (2.66) dan nilai $y_2(x)$ menggunakan persamaan (4.59), yaitu

$$\begin{aligned} A_1 &= 2y_0y_1 \\ &= \frac{1}{50}bx + \frac{1}{500}ax \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_2\} &= -\frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\{y_1\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{A_1\}\\
&= \frac{b}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{10}bx + \frac{1}{100}ax\right\} + \frac{a}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{50}bx + \frac{1}{500}ax\right\}\\
&= \frac{b}{s}\left\{\frac{b}{10s^2} + \frac{a}{100s^2}\right\} + \frac{a}{s}\left\{\frac{b}{50s^2} + \frac{a}{500s^2}\right\}\\
&= \frac{1}{10s^3}b^2 + \frac{3}{100s^3}ab + \frac{1}{500s^3}a^2 \qquad (4.68)\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.68) diperoleh

$$y_2(x) = \frac{1}{20}b^2x^2 + \frac{3}{200}abx^2 + \frac{1}{1000}a^2x^2 \qquad (4.69)$$

Untuk memperoleh nilai $y_3(x)$, maka harus dicari nilai A_2 menggunakan persamaan (2.67) dan nilai $y_3(x)$ menggunakan persamaan (4.59), yaitu

$$\begin{aligned}A_2 &= 2y_0y_2 + y_1^2\\
&= \frac{1}{50s}b^2x^2 + \frac{1}{200}abx^2 + \frac{3}{10000}a^2x^2\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_3\} &= -\frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\{y_2\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{A_2\}\\
&= \frac{b}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{20}b^2x^2 + \frac{3}{200}abx^2 + \frac{1}{1000}a^2x^2\right\} + \frac{a}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{50s}b^2x^2 + \right.\\
&\quad \left.\frac{1}{200}abx^2 + \frac{3}{10000}a^2x^2\right\}\\
&= \frac{b}{s}\left\{\frac{1}{10s^3}b^2 + \frac{3}{100s^3}ab + \frac{1}{500s^3}a^2\right\} + \frac{a}{s}\left\{\frac{1}{25s^3}b^2 + \frac{1}{100s^3}ab + \right.\\
&\quad \left.\frac{3}{5000s^3}a^2\right\}\\
&= \frac{1}{10s^4}b^3 + \frac{7}{100s^4}ab^2 + \frac{3}{250s^4}a^2b + \frac{3}{5000s^4}a^3 \qquad (4.70)\end{aligned}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.70) diperoleh

$$y_3(x) = \frac{1}{60}b^3x^3 + \frac{7}{600}ab^2x^3 + \frac{1}{500}a^2bx^3 + \frac{1}{1000}a^3x^3 \qquad (4.71)$$

Untuk memperoleh nilai $y_4(x)$, maka harus dicari nilai A_3 menggunakan persamaan (2.68) dan $y_4(x)$ menggunakan persamaan (4.59), yaitu

$$A_3 = 2y_0y_3 + 2y_1y_2$$

$$= \frac{1}{75}b^3x^3 + \frac{19}{3000}ab^2x^3 + \frac{9}{1000}a^2bx^3 + \frac{1}{25000}a^3x^3$$

maka

$$\mathcal{L}\{y_4\} = -\frac{r(x)}{q(x)s}\mathcal{L}\{y_3\} - \frac{1}{q(x)s}\mathcal{L}\{A_3\}$$

$$= \frac{b}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{60}b^3x^3 + \frac{7}{600}ab^2x^3 + \frac{1}{500}a^2bx^3 + \frac{1}{10000}a^3x^3\right\} +$$

$$\frac{a}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{75}b^3x^3 + \frac{19}{3000}ab^2x^3 + \frac{9}{10000}a^2bx^3 + \frac{1}{25000}a^3x^3\right\}$$

$$= \frac{b}{s}\left\{\frac{1}{10s^4}b^3 + \frac{7}{100s^4}ab^2 + \frac{3}{250s^4}a^2b + \frac{3}{5000s^4}a^3\right\} + \frac{a}{s}\left\{\frac{2}{25s^4}b^3 +\right.$$

$$\left.\frac{19}{500s^4}ab^2 + \frac{27}{5000s^4}a^2b + \frac{3}{12500s^4}a^3\right\}$$

$$= \frac{1}{10s^5}b^4 + \frac{3}{20s^5}ab^3 + \frac{1}{20s^5}a^2b^2 + \frac{3}{500s^5}a^3b + \frac{3}{12500s^5}a^4 \qquad (4.72)$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.72) diperoleh

$$y_4(x) = \frac{1}{120}b^4x^4 + \frac{1}{160}ab^3x^4 + \frac{1}{480}a^2b^2x^4 + \frac{1}{4000}a^3bx^4 + \frac{1}{100000}a^4x^4 \qquad (4.73)$$

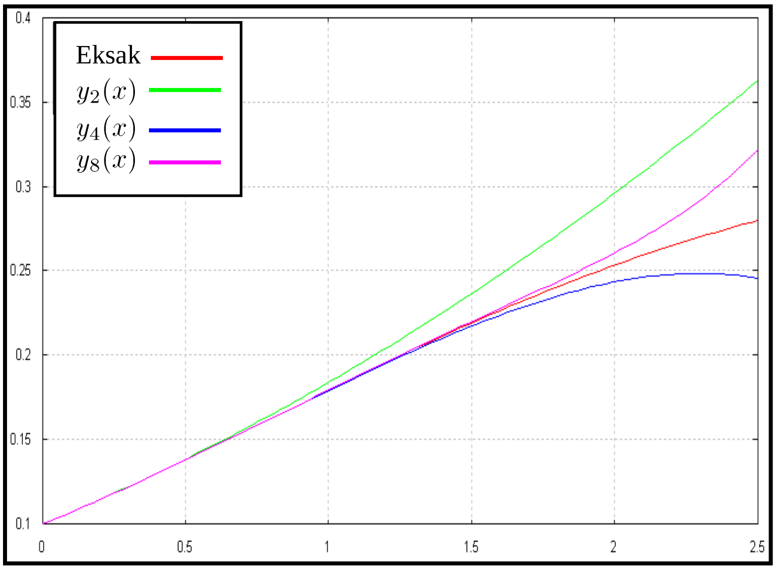
Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x), \ldots$ atau ditulis

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + y_4(x) + \ldots$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{100}(10b + a)x + \frac{1}{1000}(a + 10b)(a + 5b)x^2 + \frac{1}{30000}(10b + a)$$

$$(3a^2 + 50b^2 + 30ab)x^3 + \frac{1}{300000}(10b + a)(a + 5b)(25b^2 + 30ab + 3a^2)x^4$$

Gambar 4.5 memperlihatkan akurasi penyelesaian persamaaan (4.63) dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk untuk jumlah suku dua $\big(y_2(x)\big)$, jumlah suku empat $\big(y_4(x)\big)$, dan jumlah suku delapan $\big(y_8(x)\big)$ di $0 \leq x \leq 2,5$.



Gambar 4.5 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial biasa $y' = y(b+ay)$ untuk nilai $a=-3, b=1,$ dan $y(0)=0,1$ di $0 \le x \le 2,5$ untuk beberapa jumlah suku.

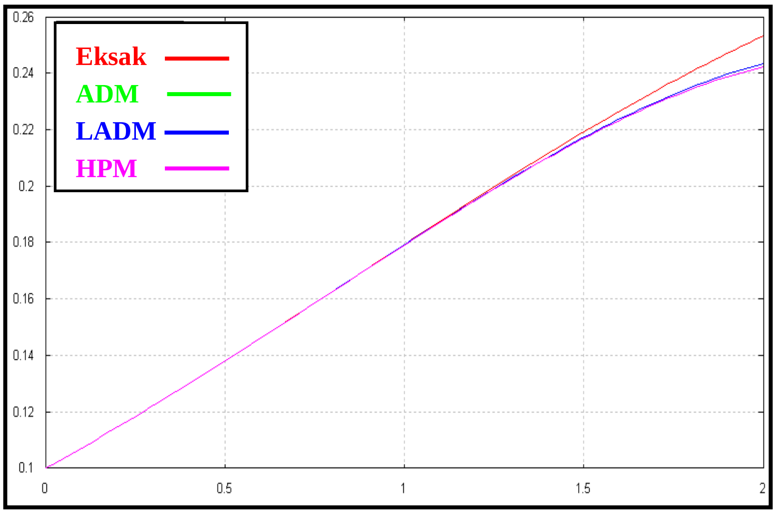
Berdasarkan Gambar 4.5 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh jumlah suku delapan $(y_8(x))$ lebih mendekati dibandingkan kurva dengan jumlah suku dua $(y_2(x))$ dan jumlah suku empat $(y_4(x))$. Hal ini menunjukkan suku lebih banyak akan mendekati nilai eksaknya.

Tabel 4.3 memperlihatkan perbandingan akurasi penyelesain untuk persamaan (4.63) menggunakan beberapa metode untuk jumlah suku empat $(y_4(x))$.

Tabel 4.3 Perbandingan penyelesaian persamaan diferencial biasa $y' = y(b+ay)$ untuk nilai $a=-3, b=1,$ dan $y(0)=0,1$ di $0 \le x \le 1$ untuk jumlah suku empat $(y_4(x))$.

x	Eksak	Metode		
		ADM	HPM	LADM
0,0	0,1000000000	0,1000000000	0,1000000000	0,1000000000
0,1	0,1071367895	0,1071367894	0,1071367893	0,1071367894
0,2	0,1145329055	0,1145328960	0,1145328960	0,1145328960
0,3	0,1221638511	0,1221637360	0,1221637360	0,1221637360
0,4	0,1300011386	0,1300004694	0,1300004693	0,1300004694
0,5	0,1380126120	0,1380100000	0,1380100000	0,1380100000
0,6	0,1461628997	0,1461549760	0,1461549760	0,1461549760
0,7	0,1544139905	0,1543937894	0,1543937893	0,1543937894
0,8	0,1627259130	0,1626805760	0,1626805760	0,1626805760
0,9	0,1710574954	0,1709652160	0,1709652160	0,1709652160
1,0	0,1793671754	0,1791933333	0,1791933333	0,1791933333

Gambar 4.6 menunjukkan akurasi penyelesaian $y(x)$ untuk persamaan (4.102) mengunakan empat suku $(y_4(x))$ di $0 \leq x \leq 2$ menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace, metode dekomposisi Adomian, dan metode homotopi pertubasi.



Gambar 4.6 Perbandingan penyelesaian persamaan diferensial biasa $y' = y(b + ay)$ untuk nilai $a = -3, b = 1$, dan $y(0) = 0,1$ di $0 \leq x \leq 2$ menggunakan LADM, ADM, dan HPM.

Contoh 4.4

Tentukan penyelesaian dari persamaan Painleve berikut

$$\frac{d^2y}{dx^2} = xy + 2y^3 \tag{4.73}$$

dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$.

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan (4.73), maka diperoleh $p(x) = 1, q(x) = 0$, $r(x) = -x, \alpha = 1$, dan $\beta = 0$. Oleh karena, $p(x) = 1$ maka penyelesaian untuk persamaan (4.73) dapat menggunakan persamaan (4.60).

Penyelesaian selanjutnya dilakukan dengan menentukan nilai $y_0(x)$ menggunakan persamaan (4.61), yaitu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y_0\} &= \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2 + q(x)s} \\ &= \frac{1}{s} \end{aligned} \tag{4.74}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.74) diperoleh

$$y_0(x) = 1 \tag{4.75}$$

Untuk memperoleh nilai $y_1(x)$, maka harus dicari nilai A_0 menggunakan persamaan (2.65) dan nilai $y_1(x)$ menggunakan persamaan (4.62) , yaitu

$$\begin{aligned} A_0 &= y_0^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y_1\} &= -\frac{r(x)}{s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{y_0\} + \frac{2}{s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{A_0\} \\ &= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{1\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{1\} \\ &= \frac{x}{s^2}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{2}{s^2}\left\{\frac{1}{s}\right\} \\ &= \frac{x}{s^3} + \frac{2}{s^3} \end{aligned} \tag{4.76}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.76) diperoleh

$$y_1(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^3 \tag{4.77}$$

Untuk memperoleh nilai $y_2(x)$, maka harus dicari nilai A_1 menggunakan persamaan (2.66) dan nilai $y_2(x)$ menggunakan persamaan (4.62), yaitu

$$\begin{aligned} A_1 &= 3y_0^2 y_1 \\ &= 3x^2 + \frac{3}{2}x^3 \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y_2\} &= -\frac{r(x)}{s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{y_1\} + \frac{2}{s^2+q(x)s}\mathcal{L}\{A_1\} \\ &= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{x^2 + \frac{1}{2}x^3\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{3x^2 + \frac{3}{2}x^3\} \\ &= \frac{x}{s^2}\left\{\frac{2s+3}{s^4}\right\} + \frac{2}{s^2}\left\{\frac{6}{s^3} + \frac{9}{s^4}\right\} \\ &= \frac{2x}{s^5} + \frac{3x}{s^6} + \frac{12}{s^5} + \frac{18}{s^6} \end{aligned} \tag{4.78}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.78) diperoleh

$$y_2(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{30}x^5 + \frac{1}{40}x^6 \tag{4.79}$$

Untuk memperoleh nilai $y_3(x)$, maka harus dicari nilai A_2 menggunakan persamaan (2.67) dan nilai $y_3(x)$ menggunakan persamaan (4.62), yaitu

$$A_2 = 3y_0^2 y_2 + 3y_1^2 y_0$$

$$= \frac{9}{2}x^4 + \frac{37}{10}x^5 + \frac{33}{40}x^6$$

maka

$$\mathcal{L}\{y_3\} = -\frac{r(x)}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_2\} + \frac{2}{s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_2\}$$

$$= \frac{x}{s^2}\mathcal{L}\{\frac{1}{2}x^4 + \frac{7}{30}x^5 + \frac{1}{40}x^6\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{\frac{9}{2}x^4 + \frac{37}{10}x^5 + \frac{33}{40}x^6\}$$

$$= \frac{x}{s^2}\left\{\frac{12}{s^5} + \frac{28}{s^6} + \frac{18}{s^7}\right\} + \frac{2}{s^2}\left\{\frac{108}{s^5} + \frac{444}{s^6} + \frac{594}{s^7}\right\}$$

$$= \frac{12x}{s^7} + \frac{28x}{s^8} + \frac{18}{s^9} + \frac{216}{s^7} + \frac{888}{s^8} + \frac{1188}{s^9} \tag{4.80}$$

Selanjutnya, dengan menginverskan persamaan (4.80) diperoleh

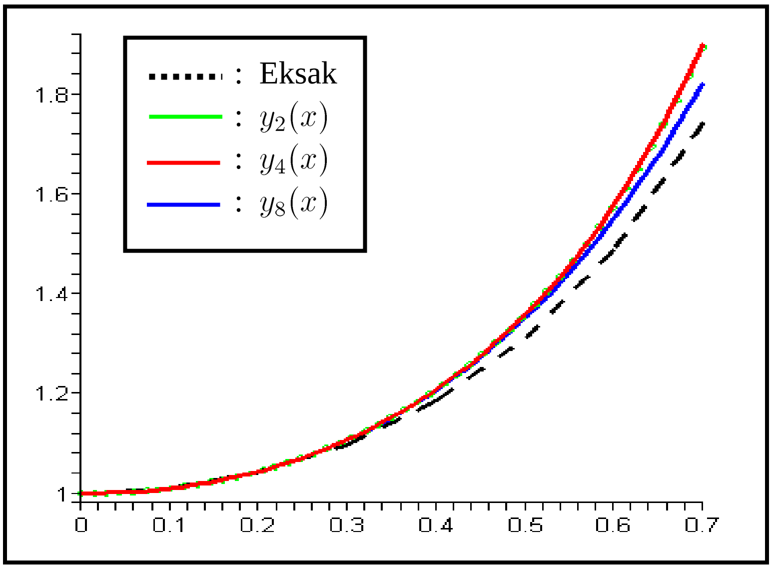
$$y_3(x) = \frac{3}{10}x^6 + \frac{27}{140}x^7 + \frac{353}{10080}x^8 + \frac{1}{2240}x^9 \tag{4.81}$$

Penyelesaian persamaan dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots$ atau ditulis

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) + \ \ldots$$

$$= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{30}x^5 + \frac{13}{40}x^6 + \frac{27}{140}x^7 + \frac{353}{10080}x^8 + \frac{1}{2240}x^9 + \ldots$$

Gambar 4.4 menunjukkan akurasi penyelesaian persamaan (4.73) menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk beberapa jumlah suku yang digunakan.



Gambar 4.7 Hampiran penyelesaian persamaan painleve $y'' = xy + 2y^3$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$ di $0 \leq x \leq 0,7$ untuk beberapa jumlah suku.

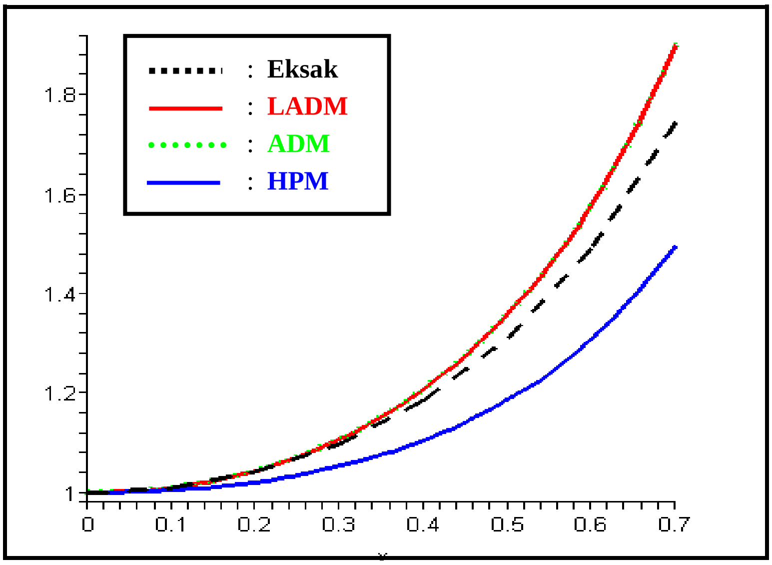
Berdasarkan Gambar 4.7 terlihat bahwa hampiran penyelesaian menggunakan delapan suku lebih mendekati nilai eksak jika dibandingkan dengan hampiran yang diperoleh dengan menggunakan dua suku dan empat suku.

Tabel 4.4 menunjukkan perbandingan akurasi penyelesaian dari persamaan (4.73) menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace (LADM), metode dekomposisi Adomian (ADM), dan metode homotopi pertubasi (HPM) dengan jumlah suku sebanyak lima suku $\left(y_5(x)\right)$.

Tabel 4.4 Perbandingan penyelesaian persamaan Painlave $y'' = xy + 2y^3$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$ di $-0,7 \leq x \leq 0,7$ untuk jumlah suku lima $\left(y_5(x)\right)$.

x	Eksak	Metode		
		ADM	HPM	LADM
-0,7	1,5573	1,4303	1,3315	1,4303
-0,6	1,3963	1,3111	1,2162	1,3111
-0,5	1,2622	1,2156	1,1371	1,2156
-0,4	1,1623	1,1395	1,0824	1,1395
-0,3	1,0895	1,0802	1,0445	1,0802
-0,2	1,0395	1,0367	1,0195	1,0367
-0,1	1,0099	1,0096	1,0049	1,0096
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	1,0102	1,0106	1,0052	1,0106
0,2	1,0422	1,0449	1,0222	1,0449
0,3	1,0990	1.1084	1,0540	1.1084
0,4	1,1860	1,2089	1,1060	1,2089
0,5	1,3116	1,3590	1,1865	1,3590
0,6	1,4895	1,5779	1,3093	1,5779
0,7	1,7441	1,8995	1,4975	1,8995

Gambar 4.8 menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $y(x)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian, metode pertubasi homotopi, dan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk jumlah suku sebanyak lima suku terhadap penyelesaian eksak di $0 \leq x \leq 0,7$.



Gambar 4.8 Perbandingan penyelesaian persamaan Painleve $y'' = xy + 2y^3$ dengan nilai awal $y(0) = 1$ dan $y'(0) = 0$ di $0 \le x \le 0,7$ menggunakan LADM, ADM, dan HPM.

Berdasarkan Gambar 4.8 dapat dilihat bahwa kurva yang dibentuk oleh $\left(y_5(x)\right)$ untuk metode dekomposisi Adomian dan metode dekomposisi Adomian Laplace lebih mendekati dibandingkan kurva metode homotopi pertubasi. Hal ini menjelaskan bahwa metode dekomposisi Adomian Laplace mempunyai hasil yang sama dengan metode dekomposisi Adomian dalam mendekati penyelesaian eksak dan lebih baik hampirannya jika dibandingkan dengan metode homotopi pertubasi.

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari Tugas Akhir ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

a) Metode dekomposisi Adomian Laplace dapat menyelesaikan persamaan diferensial biasa nonlinier orde dua dengan bentuk umum $p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y + f(y) = g(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$ dan $y'(0) = \beta$ serta komponen nonliniernya $Ny = f(y)$ dengan menggunakan persamaan

$$\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{y_0\} - \frac{r(x)}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} y_i\right\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right\}$$

dengan

$$\mathcal{L}\{y_0\} \quad = \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{p(x)^2s^2 + p(x)q(x)s} + \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{g(x)\}$$

dan

$$\mathcal{L}\{y_{i+1}\} = -\frac{r(x)}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{y_i\} - \frac{1}{p(x)s^2 + q(x)s}\mathcal{L}\{A_i\}$$

b) Hasil penyelesaian yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk menyelesaikan persamaan Riccati adalah sama dengan penyelesaian menggunakan metode dekomposisi Adomian dan lebih baik jika dibandingkan penyelesaian menggunakan metode iterasi variasi untuk beberapa titik tertentu, hal ini dapat dilihat pada Gambar 4.2 .

c) Hasil penyelesaian untuk persamaan Painleve menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace adalah sama dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian dan hasilnya penyelesaiannya lebih baik jika dibandingan penyelesaian menggunakan metode homotopi pertubasi, hal ini dapat terlihat pada Gambar 4.4 dan Gambar 4.8.

d) Hasil penyelesaian yang diperoleh dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace untuk beberapa suku yang digunakan semakin mendekati nilai eksak. Hal ini dapat dilihat pada Tabel 4.1, Tabel 4.2, Tabel 4.3, dan Tabel 4.4.

e) Semakin banyak jumlah suku-suku $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ yang digunakan untuk metode dekomposisi Adomian Laplace maka hasil yang diperoleh akan cukup akurat dan efektif. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 4.1, Gambar 4.3, Gambar 4.5, dan Gambar 4.7

5.2. Saran

Tugas Akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial biasa nonlinear orde dua dengan bentuk $p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y + f(y) = g(x)$ dengan masalah nilai awal $y(0) = \alpha$ dan $y'(0) = \beta$ dan komponen nonliniernya $Ny = f(y)$ dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan tugas akhir ini, penulis sarankan membahas tentang persamaan differensial aljabar nonlinier dengan menggunakan metode dekomposisi Adomian Laplace.

DAFTAR PUSTAKA

Adomian, G., *Solving Frontier Problems of Physics : The Adomian Decomposition Method*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

Batiha, B., *et. al.*, Application of variational iteration method to a general Riccati equation, *International Mathematical Forum*, 56(2) : 2759 – 2770, 2007.

Chowdhury, M. S. H., Solving linier and nonlinier differential equations by homotopy perturbation method, *Faculty of Science and Thechnology Universiti Kebangsaan Malaysia*, Thesis : 33 – 37, 2007.

Campbell, S. L., *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*, *2th Edition*, Wadswort, Inc., USA, 1990.

Edwards, C. H. and Penney, D. E., *Differential Equations & Linear Algebra*, Printice-Hall, Inc., New Jersey, 2001.

Hesemaddini, E., *et.al.*, Homotopy perturbation method for second Painleve equation and comparisons with analityc continuation extension and Chebishev series method, *Int. Mathematical Forum*, 13(5) : 629 – 637, 2010.

Kiyamas, O., An algorithm for solving initial value problems using Laplace Adomian decomposition method, *Applied Mathematical Science*, 30(3) : 1453 – 1459, 2009.

Kreyszig, E., *Advance Engineering Mathematics*, *9th Edition*, Jhon Wiley & Sons, Inc., Singapore, 2006.

Syam, M. I. and Hamdan, A., An efficient method for s olving Bratu equations, *Applied Mathematics and Computation*, 176 : 704 – 713, 2006.

Vahidi, A. R., Improving the accuracy of solutions of linear and nonlinier ODEs in decomposition method, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 3(3) : 2255 – 2261, 2009.

Varberg, D, Edwin J. P, and Steven E. R., *Calculus*, *9th Edition*, Person Education, Inc., USA, 2007

Wartono, dkk., *Persamaan Diferensial Biasa dan Masalah Nilai Awal*, UIN-SUSKA Press., Pekanbaru, 2009.

Yusufoglu, E., Numerical solution of Duffing equation by the Laplace decomposition algorithm, *Applied Mathematics and Computation*, 177 : 572 – 580, 2006.